Math
179
-2-

Gesch. v. Egloffstein 1919.

F. v. Tautphoeus
1856.

Mit 5 Tafeln.

Zweites Buch.

Die körperliche Geometrie (Stereometrie).

Stadtbibliothek Augsburg

Einleitung.

§. 1.

Die Stereometrie beschäftigt sich, wie schon in der Planimetrie (§. 1. 14.) angedeutet wurde, mit den körperlichen Figuren, d. i. mit solchen, deren Punkte und Linien nicht alle auf derselben Ebene liegend gedacht werden können. Hiebei betrachtet sie zuerst die gegenseitige Lage von geraden Linien und Ebenen im Raume und beschränkt sich dann, als Theil der Elementargeometrie, nur auf solche körperliche Räume, die von Ebenen gebildet werden und auf solche Körper, die entweder ganz von Ebenen begrenzt sind, oder von solchen krummen Flächen, welche sich auf die in der Planimetrie behandelten ebenen Figuren zurückführen lassen. Aus dem Angedeuteten ergiebt sich die Eintheilung der Stereometrie in vier Abschnitte.

Die Darstellung körperlicher Figuren auf Ebenen macht es in vielen Fällen nothwendig, Winkel und ebene Figuren nicht in ihrer wirklichen Größe und Form zu zeichnen, wodurch dem Anfänger das Auffassen der Sätze etwas erschwert ist Es ist daher vor Allem nothwendig, sich von der Lage der Linien genau Rechenschaft zu geben, bevor man es versucht, die Sätze zu studieren. Modelle werden hier in vielen Fällen die Anschauung sehr erleichtern.

Körperliche Figuren auf Ebenen richtig darzustellen, gehört unter die Aufgaben der darstellenden (descriptiven) Geometrie, deren Regeln sich aber selbst auf geometrische, namentlich stereometrische Sätze gründen.

Anmerk. Bei Anführung von Sätzen aus der ebenen Geometrie werden wir den treffenden Paragraphen und Numern zur Unterscheidung von den stereometrischen Sätzen die Bezeichnung „Pl." vorsetzen

Erster Abschnitt.

Von der Lage der Linien und Ebenen im Raume.

§. 2.

Erklärung. Eine Linie liegt auf einer Ebene, wenn alle ihre Punkte auf derselben liegen, sie schneidet die Ebene, wenn Punkte von ihr auf beiden Seiten außerhalb derselben liegen. Dasselbe gilt auch von zwei Ebenen.

1. Zusatz. Eine Gerade liegt auf einer Ebene, wenn sie zwei Punkte mit der Ebene gemeinschaftlich hat (Pl. §. 1. 6 und 7.). Sie kann also nicht zum Theil in, zum Theil außerhalb der Ebene liegen und kann dieselbe nur in einem einzigen Punkte schneiden.

Anmerk. Wir denken uns die Linien und Ebenen bei Betrachtung der Lage als unbegrenzt.

2. Zusatz. Zwei gerade Linien, die sich schneiden, liegen auf derselben Ebene. Denn denkt man sich durch die eine Linie eine Ebene gelegt und dieselbe so lange gedreht, bis sie auf einen Punkt der andern Linie zu liegen kommt, während sie die erste als Drehungsachse beibehält, so muß die Ebene auf beiden Linien ganz aufliegen.

3. Zusatz. Durch zwei schneidende gerade Linien, also auch durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben, deßgleichen durch drei Punkte oder durch zwei parallele Linien ist die Lage einer Ebene vollkommen bestimmt.

4. Zusatz. Eine Ebene wird erzeugt, wenn sich eine Gerade (Erzeugungslinie) so bewegt, daß sie eine andere Gerade (Leitlinie) beständig schneidet und dabei entweder zu ihrer ersten Lage stets parallel bleibt, oder immer durch einen bestimmten Punkt geht.

5. Zusatz. Zwei Ebenen können sich nur in einer geraden Linie schneiden; denn denkt man sich zwei Punkte des Durchschnitts, der nothwendig eine Linie seyn muß, durch eine Gerade verbunden, so muß sie in beiden Ebenen liegen.

6. Zusatz. Zwei Ebenen, die nicht in eine einzige zusammenfallen, schneiden sich, sobald sie einen Punkt gemeinschaftlich haben.

7. Zusatz. Durch eine Gerade sind unendlich viele Ebenen möglich.

§. 3.

Erklärung. **Eine Gerade steht auf einer Ebene, wenn sie einen Punkt außerhalb und einen Punkt in der Ebene hat. Den letzten Punkt heißt man ihren Fußpunkt. Ueber diesen verlängert, schneidet sie die Ebene.**

Anmerk. Ebenen, die ihrer Lage nach gegeben sind, stellt man gewöhnlich durch ein Parallelogramm oder Trapez dar. Eine Linie innerhalb des Umfangs soll eine auf der Ebene liegende Linie vorstellen, wie z. B. A B auf der Ebene M N (Fig. 119.); steht aber die Linie auf der Ebene, so soll das außerhalb derselben liegende Ende über die Grenze der die Ebene darstellenden Figur hinausreichen. So steht z. B. C D auf der Ebene R S (Fig. 120.) und hat in D ihren Fußpunkt.

§. 4.

Erklärung. **Steht eine Linie so auf einer Ebene, daß sie mit allen in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogenen Geraden gleiche Winkel bildet, so heißt sie senkrecht auf der Ebene (weil, wie sich sogleich zeigen wird, sämmtliche Winkel rechte sind). Außerdem steht sie auf der Ebene schief und der kleinste unter den ungleichen Winkeln ist die Neigung der Linie zur Ebene.**

§. 5.

I. *Lehrsatz.* **Wenn eine Gerade A B (Fig. 121.) auf zwei in der Ebene M N durch ihren Fußpunkt B gezogenen Linien B C und BD senkrecht ist, so ist sie auf allen andern durch B in der Ebene gezogenen Geraden, folglich auf der Ebene selbst senkrecht.**

Thes.: $AB \perp MN$.
Dat.: $\begin{cases} AB \perp BC. \\ AB \perp BD. \end{cases}$

Beweis. Zieht man innerhalb der Schenkel des Winkels CBD die Gerade EB in der Ebene MN beliebig und durch E eine Gerade CED so, daß $CE = ED$, ferner die Verbindungslinien AC, AE, AD, so hat man:

$$AC^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2CE^2$$
eben so $BC^2 + BD^2 = 2BE^2 + 2CE^2$ (Pl. Anhang. §. 3. Lehrs. 2.)

folglich $AC^2 - BC^2 + AD^2 - BD^2 = 2AE^2 - 2BE^2$.
Es ist aber $AC^2 - BC^2 = AB^2 = AD^2 - BD^2$ (pyth. Lehrs.)
folglich $2AB^2 = 2AE^2 - 2BE^2$
und $AB^2 + BE^2 = AE^2$.

Daher ist das Dreieck ABE bei B rechtwinklig oder AB ⊥ BE. Da dieß eben so von jeder andern durch B in der Ebene MN gezogenen Linie bewiesen werden kann, so ist AB auch senkrecht auf MN.

Anmerk. Wollte man den angeführten Satz des Anhangs nicht benützen, so ließe sich der Beweis auch mittels sieben congruenter Dreieckpaare machen.

1. Zusatz. Wenn mehrere Linien BC, BD, BE (Fig. 122.) mit einer einzigen Linie AB sämmtlich rechte Winkel bilden, so liegen sie in einer einzigen Ebene, die auf AB senkrecht ist. Denn läge etwa BD nicht in der durch CBE gelegten und auf AB senkrechten Ebene, so hätte man, wenn man durch ABD eine zweite Ebene legte, die die erstere in BF schnitte, $\vee ABF = R = \vee ABD$, was unmöglich ist.

2. Zusatz. Steht eine Linie CD (Fig. 123.) auf einer andern AB in D senkrecht, und man denkt sich die ganze Figur um AB als Achse gedreht, so beschreibt DC eine Kreislinie, deren Ebene auf AB senkrecht ist.

3. Zusatz. Von einem Punkte B einer Ebene MN (Fig. 124.) kann man nur eine einzige Senkrechte BA errichten. Denn wäre auch BE auf MN senkrecht, und man legte durch ABE eine Ebene, die MN etwa nach FBG schnitte, so müßte $\vee ABG = \vee EBG = R$ seyn, was unmöglich ist; es ist daher EB auch nicht auf MN senkrecht.

4. Zusatz. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann man auf dieselbe nur eine einzige Senkrechte fällen.

5. Zusatz. Die senkrechte Linie ist die kürzeste, die man von einem Punkte auf eine Ebene fällen kann. Sie ist die Entfernung des Punktes von der Ebene. Schiefe Linien von demselben Punkte sind einander gleich, wenn ihre Fußpunkte von dem Fußpunkte der Senkrechten gleichweit entfernt sind, sie werden aber um so größer, je weiter sich ihre Fußpunkte von dem der Senkrechten entfernen. (Beweis?)

6. Zusatz. Haben mehrere gleiche schiefe Linien denselben Anfangspunkt, so liegen ihre Fußpunkte in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt der Fußpunkt der von demselben Anfangspunkt auf die Ebene gefällten Senkrechten ist.

§. 6.

II. Lehrsatz. **Fällt man von einem Punkte A einer auf der Ebene MN (Fig. 125.) schief stehenden Geraden AC eine Senkrechte AB auf dieselbe Ebene und verbindet die Fußpunkte B, C, so ist der Winkel ABC der kleinste, den die Schiefe mit**

einer in der Ebene durch ihren Fußpunkt gelegten Geraden einschließt, also der Neigungswinkel der Linie zur Ebene.

Beweis. Zieht man in der Ebene **MN** die beliebige Gerade **CD** = **CB**, ferner die Verbindungslinie **AD**, so ist, weil $AB < AD$ (§. 5. Zus. 5.), in den Dreiecken **ACB** und **ACD** $\vee ACB < \vee ACD$. (Pl. §. 11. Zusatz.)

1. Zusatz. Beschreibt man aus **C** mit **CB** in der Ebene **MN** einen Halbkreis **BDFGE**, so ist, weil offenbar $BD < BF < BG < BE$, auch $AD < AF < AG < AE$, folglich auch $\vee ACD < \vee ACF < \vee ACG < \vee ACE$, so daß der Nebenwinkel **ACE** des Neigungswinkels **ACB** der größte ist, den die Schiefe **AC** mit einer in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogenen Geraden bildet.

2. Zusatz. Von zwei schiefen Linien, die denselben Anfangspunkt haben, hat die größere den kleinern Neigungswinkel.

§. 7.

III. **Lehrsatz. Ist eine Gerade AB senkrecht auf einer Ebene MN (Fig. 121.) und man zieht von ihrem Fußpunkte B eine Senkrechte BE auf eine in derselben Ebene liegende Gerade DEC, so ist die Verbindungslinie AE auch senkrecht auf DC.**

Thes.: $AE \perp DC$.
Dat.: $AB \perp MN$. $BE \perp DC$.

Beweis. Macht man **CE** = **ED** und zieht **DB**, **CB**, **AD**, **AC**, so ist, weil **DB** = **CB** auch **AD** = **AC** (§. 5. Zus. 5.), folglich ist das Dreieck **ADC** gleichschenklig und $AE \perp DC$.

Anmerk. Da **EB** auch die Projektion der Schiefen **AE** für die Projektionsebene **MN** heißt, so könnte man den Satz auf folgende Weise kürzer ausdrücken: „Zieht man in der Projektionsebene durch den Fußpunkt einer Schiefen eine Senkrechte auf deren Projektion, so ist dieselbe auch senkrecht auf der Schiefen selbst.“

1. Zusatz. Ist $AB \perp MN$, $AE \perp DC$, so ist auch $EB \perp DC$.

2. Zusatz. Ist $AB \perp MN$, $AE \perp DC$, so muß die in der Ebene **MN** aus **E** errichtete Senkrechte durch **B** gehen.

3. Zusatz. Ist $AE \perp DC$, $EB \perp DC$, $AB \perp EB$, so ist auch $AB \perp MN$.

4. Zusatz. Da $\vee AED = \vee BED = R$, so ist **DEC** auf der Ebene **ABE** senkrecht.

§. 8.

VI. **Lehrsatz. Sind zwei gerade Linien AB und CD auf einer Ebene MN (Fig. 126.) senkrecht, so sind sie parallel.**

Thes.: AB || CD.
Dat.: { AB ⊥ MN. CD ⊥ MN.

Beweis. Zieht man EDF in der Ebene MN senkrecht auf die Verbindungslinie der Fußpunkte B und D und die Gerade AD, so liegen die drei Linien AD, BD, DC in einer und derselben Ebene (§. 5. Zus. 1.), folglich auch die Geraden AB und CD. Da aber offenbar ∨ABD + ∨BDC = 2R sind, so ist AB || CD.

1. Zusatz. Wenn von zwei Parallelen die eine auf einer Ebene senkrecht ist, so ist es auch die andere.

2. Zusatz. Wenn zwei Linien AB und CD mit einer beliebig im Raume liegenden dritten EF parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel. Denn denkt man sich auf EF (Fig. 127.) die senkrechte Ebene FBD, welche AB und CD in B und D schneidet, so muß diese (nach dem Zus. 1.) auch auf AB und CD senkrecht seyn, folglich sind dieselben parallel nach dem Lehrsatze.

§. 9.

Erklärung. Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn sie die letztere in ihrer Verlängerung nicht schneidet.

1. Zusatz. Eine Gerade ist mit einer Ebene parallel, wenn sie mit einer auf der Ebene liegenden Geraden parallel ist. Denn da die beiden Parallelen in derselben Ebene liegen, so könnte der allenfalls mögliche Durchschnittspunkt nur auf der in der Ebene liegenden Linie seyn, was der Annahme widerspricht.

2. Zusatz. Hiernach läßt sich durch einen Punkt zu einer Ebene eine parallele Linie ziehen.

§. 10.

Erklärung. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie sich in ihrer Erweiterung nicht schneiden.

§. 11.

V. **Lehrsatz. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie beide auf einer Geraden senkrecht sind.**

Beweis. Sind die Fußpunkte der Senkrechten etwa A und B und die beiden Ebenen hätten den Punkt C gemeinschaftlich, so müß-

ten, wenn man durch A, B, C eine Ebene legte, die beiden ersteren Ebenen nach den Geraden AC und BC geschnitten werden, und es entstünde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln, was nicht möglich ist.

§. 12.

VI. **Lehrsatz. Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten nach parallelen Linien geschnitten.**

(Der Beweis negativ.)

1. Zusatz. Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind gleich.

2. Zusatz. Werden drei oder mehrere parallele Ebenen von zwei beliebigen Geraden geschnitten, so sind die zwischen den Ebenen liegenden Stücke in gerader Proportion, die Geraden mögen in derselben Ebene liegen oder nicht.

3. Zusatz. Sind drei gerade Linien, AB, CD, EF (Fig. 128.) die beliebig im Raume liegen, gleich und parallel, so sind die durch die Endpunkte A, C, E und B, D, F gelegten Ebenen parallel. Denn wären sie nicht parallel und eine zu BDF durch A gelegte parallele Ebene schnitte CD und EF etwa in G und H, so müßte AB = GD = HF seyn, was gegen die Annahme ist.

4. Zusatz. Sind die Schenkel zweier Winkel, die nicht in derselben Ebene liegen, in übereinstimmender Richtung parallel, so sind die Winkel gleich und ihre Ebenen parallel.

5. Zusatz. Durch zwei Linien, die sich im Raume nicht schneiden und auch nicht parallel sind, lassen sich stets zwei parallele Ebenen legen, man erhält dieselben, wenn man aus einem beliebigen Punkte jeder Linie eine parallele zu der andern zieht, und durch die entstehenden Winkel Ebenen legt.

6. Zusatz. Denkt man sich aus einem Punkte der einen Linie eine Senkrechte auf die Ebene der andern gezogen und dieselbe parallel zu sich selbst an der ersten Linie fortbewegt, so wird sie die zweite Linie in einem bestimmten Punkte treffen und gleichfalls auf ihr senkrecht seyn. Diese Senkrechte ist zugleich der kürzeste Abstand beider Linien, was sich mittels rechtwinkliger Dreiecke leicht nachweisen läßt.

§. 13.

VII. **Lehrsatz. Wenn eine Gerade AB (Fig. 129.) auf der einen von zwei parallelen Ebenen MN und OR senkrecht ist, so ist sie auch senkrecht auf der andern.**

Thes.: AB ⊥ OR. Beweis. Zieht man in der Ebene MN

Dat.: { AB ⊥ MN. zwei beliebige gerade Linien AC und AD, so
{ MN || OR. sind die Winkel CAB, DAB rechte (nach der Annahme). Legt man nun durch dieselben zwei Ebenen, die OR nach BE und BF schneiden, so müssen auch, weil AC || BE und AD || BF (§. 12.), die Winkel ABE und ABF rechte seyn, folglich ist AB ⊥ OR.

1. Zusatz. Parallele Ebenen sind überall gleichweit von einander entfernt.

2. Zusatz. Eine Gerade kann auf zwei sich schneidenden Ebenen nicht zugleich senkrecht seyn.

3. Zusatz. Durch einen Punkt giebt es zu einer Ebene nur eine einzige parallele Ebene.

4. Zusatz. Wenn zwei Ebenen auf einer Geraden senkrecht sind, so sind sie parallel

5. Zusatz. Zwei Ebenen, die zu einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel.

§. 14.

I. **Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte A auf eine Ebene MN eine Senkrechte zu fällen.**

Auflösung mit Beweis (Fig. 126.). Zieht man in der Ebene MN die willkührliche Gerade FE und in der durch AFE gelegten Ebene die Senkrechte AD auf FE, ferner gleichfalls senkrecht auf FE die Gerade DB in MN, so ist die von A auf DB in der Ebene ADB gefällte Senkrechte AB auf MN selbst senkrecht (§. 7. Zus. 3.).

§. 15.

II. **Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte B einer Ebene MN eine Senkrechte zu errichten.**

Auflösung mit Beweis. Fällt man von einem Punkte C (Fig. 126.) auf MN die Senkrechte CD und zieht durch A in der Ebene ADC die Parallele AB zu CD, so wird letztere auf MN senkrecht seyn (§. 8. Zus. 1.).

§. 16.

III. **Aufgabe. Durch eine gegebene Linie eine Ebene zu legen, die mit einer andern nicht in derselben Ebene liegenden Linie parallel ist.**

Auflösung mit Beweis. Zieht man durch einen beliebigen Punkt der ersten Linie eine parallele zur zweiten, so wird die durch die beiden schneidenden Linien gelegte Ebene zur zweiten Linie parallel seyn (§. 9. Zusatz.).

Zweiter Abschnitt.

Von den körperlichen Räumen (Flächenwinkeln und körperlichen Ecken).

§. 17.

Erklärung. Schneiden sich zwei Ebenen MN und OP (Fig. 130.), so heißt der zwischen beiden eingeschlossene unbegrenzte Raum ein Flächenwinkel; die Durchschnittslinie ON heißt Kante, die beiden Ebenen sind die Seiten des Winkels MONP.

Zusatz. In Bezug auf Flächenwinkel gilt Aehnliches, wie von Linienwinkeln. Man unterscheidet Neben-, Scheitel-Flächenwinkel, rechte, spitze, stumpfe. Senkrechte und schiefe Ebenen u. s. w.

§. 18.

I. **Lehrsatz. Zieht man aus zwei beliebigen Punkten B und D der Kante eines Flächenwinkels (Fig. 131.) in den beiden Seiten desselben die Parallelen BA, DC und BE, DF nach willkührlicher Richtung; so sind die beiden Linienwinkel ABE CDF einander gleich.**

Beweis. Macht man AB = CD, EB = FD und zieht AC, EF, AE, CF, so ist, weil AC und EF gleich und parallel sind mit BD, das Viereck ACFE ein Parallelogramm, mithin AE = CF, daher auch △ABE ≅ CDF, also ∨ABE = ∨CDF.

1. Zusatz. Sind die Geraden AB und BE zugleich auf der Kante senkrecht, und man dreht die eine Seite MN um die Kante als Achse, bis sie mit der andern Seite NO zusammenfällt, so wird auch die Gerade AB mit BE zusammenfallen und die Größe des Winkels ABE auch die Größe des Kantenwinkels selbst bestimmen. Das Maß

eines Flächenwinkels ist also ein Linienwinkel, dessen Schenkel in den Seiten des ersteren liegen und in einem gemeinschaftlichen Punkte auf der Karte senkrecht sind.

2. Zusatz. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so ist jede durch die Gerade gelegte Ebene auf der gegebenen senkrecht. Denn zieht man durch den Fußpunkt der Senkrechten in der gegebenen Ebene eine Senkrechte auf die Durchschnittslinie beider Ebenen, so sind die Maße der Flächenwinkel, folglich diese selbst gleich.

3. Zusatz. Durch eine senkrechte Linie kann man auf eine Ebene unendliche viele senkrechte Ebenen legen, durch eine schiefe und parallele nur eine einzige.

4. Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht sind, so ist jede Gerade, welche man in der einen auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt senkrecht zieht, auch senkrecht auf der andern Ebene.

5. Zusatz. Wenn zwei Ebenen aufeinander senkrecht sind, und man errichtet in einem Punkte der Durchschnittslinie eine Senkrechte auf die eine Ebene, so muß sie ganz in die andere fallen.

6. Zusatz. Parallele Ebenen werden von einer Geraden unter gleichen Winkeln geschnitten, deßgleichen auch von einer dritten Ebene.

§. 19.

II. Lehrsatz. **Wenn zwei Ebenen, die sich schneiden, auf einer dritten senkrecht sind, so ist auch die Durchschnittslinie der beiden ersteren auf der dritten senkrecht.**

Beweis. Errichtet man im Durchschnittspunkte aller drei Ebenen eine Senkrechte auf die dritte Ebene, so muß sie in die beiden ersteren fallen, kann also nur die Durchschnittslinie derselben seyn.

1. Zusatz. Wenn eine Ebene senkrecht auf dem Durchschnitt zweier Ebenen ist, so ist sie senkrecht auf den beiden letzteren selbst.

2. Zusatz. Wenn von drei Ebenen je zwei aufeinander senkrecht sind, so bilden auch je zwei ihrer Durchschnitte rechte Winkel und umgekehrt.

Erklärung. **Wenn drei oder mehrere Ebenen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so heißt der von denselben eingeschlossene körperliche Raum ein Körperwinkel, auch ein Raumeck oder körperliches Eck. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt heißt Spitze, die Durchschnittslinien die Kanten des Körperwinkels. Die ebenen Winkel,**

die von je zwei aufeinander folgenden Kanten gebildet werden, heißen Kantenwinkel, auch die Seiten des Ecks. An jeder Kante, deren Anzahl der Zahl der schneidenden Ebenen gleich ist, hat das Eck auch einen Flächenwinkel. Nach der Zahl der Ebenen unterscheidet man drei-, vier-, fünfseitige Körperwinkel oder körperliche Ecke.

Zusatz. So wie zwei gerade Linien, die in einem Punkte zusammenkommen, immer zwei Winkel bilden, nämlich einen hohlen und einen erhabenen, so kann man auch stets zwei Körperwinkel unterscheiden, nämlich einen convexen (den kleineren) und einen concaven. Man meint aber gewöhnlich den convexen, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich angegeben ist.

§. 21.

III. Lehrsatz. **Zwei Seiten eines körperlichen Dreiecks sind immer größer als die dritte.**

Beweis. Da es sich von selbst versteht, daß unser Satz nur in soferne eines Beweises bedarf, als behauptet wird, daß die beiden kleinern zusammengenommen größer als die größte Seite seyen, so wollen wir annehmen, die größte Seite des Raumecks **ABCD** (**Fig. 132.**) sey $\vee BAC$, mithin

Thes.: $\vee BAD + \vee DAC > \vee BAC$.

Dat.: $\vee BAC > \vee BAD$ und $> \vee DAC$.

Man schneide von $\vee BAC$ ein Stück $\vee BAE = \vee BAD$ ab, mache $AE = AD$, lege durch **D**, **E** und einen beliebigen Punkt **B** der Kante **AB** eine Ebene, die gehörig erweitert die Kante **AC** in **C** schneidet und ziehe die Durchschnittslinien **BC**, **BD**, **DC** und die Linie **DE**, so ist, weil

$$\triangle BAD \cong \triangle BAE \text{ (I. Congr.)}$$

auch $BD = BE$,

und weil $BD + DC > BE + BC$

---

auch $DC > EC$, folglich in den Dreiecken

ADC und **AEC**, auch

$\vee DAC > \vee EAC$, mithin weil

$\vee BAD = \vee BAE$,

---

auch $\vee BAD + \vee DAC > \vee BAE + \vee EAC$ oder

$\vee BAD + \vee DAC > \vee BAC$.

Zusatz. Da dieser unser Satz auch für die Raumecke bei **B**, **C**,

D gilt, so ist $\vee ABD + ADB + ADC + ACD + ABC + ACB > \vee DBC + BCD + CDB$ oder $> 2R$. Mithin, weil die neun Winkel der Dreiecke ABD, ADC, ABC zusammen gleich 6 R sind, $\vee BAD + BAC + \vee DAC < 4R$, d. h. die drei Seiten eines körperlichen Dreiecks betragen immer weniger als 4 R.

§. 22.

IV. Lehrsatz. **Nimmt man innerhalb eines körperlichen Dreiecks ABCD (Fig. 133) einen Punkt E an, fällt von demselben auf die drei Seiten BAC, BAD, CAD die drei Senkrechten Ed, Ec, Eb und legt durch dieselben die Ebenen bEc, bEd, cEd, so bilden diese ein körperliches Dreieck Ebcd, dessen Flächenwinkel und Seiten beziehungsweise die Seiten und Flächenwinkel des ursprünglichen Ecks zu 2R ergänzen.**

Beweis. Die Seiten der beiden körperlichen Ecke schneiden sich in den Linien bC, bD, cB, cD, dB, dC.

Da nun die Ebene EbCd sowohl als EbDc auf der Ebene CAD senkrecht stehen, so ist CbD der Flächenwinkel der Ecke Ebcd an der Kante Eb. Da aber die Ebene EbCd, weil sie durch die beiden Senkrechten Eb und Ed gelegt ist, auf den beiden Ebenen CAD und CAB senkrecht ist, so ist sie auch senkrecht auf der Kante AC und der Winkel bCd ist der Flächenwinkel der beiden Ebenen BAC und DAC. Aus gleichem Grunde ist auch die Ebene EbDc auf AD senkrecht. Da endlich in dem Viereck ADbC die beiden Winkel ADb und bCA rechte sind, so ergänzt der Winkel DbC den Winkel CAD zu 2R. Eben so ist es in dem Viereck EbCd mit den Winkeln dCb und dEb. Diese Winkel stehen aber in der oben bezeichneten Beziehung, daß nämlich der eine eine Seite des einen Ecks und der andere der gegenüberliegende Flächenwinkel des andern ist.

Zusatz. Eben so würde der Satz bewiesen für mehrseitige Körperwinkel.

§ 23.

Erklärung. **Stehen zwei körperliche Ecke in der durch den obigen Lehrsatz ausgedrückten Beziehung, so heißt jedes das Supplementareck des andern.**

Anmerk. In der Trigonometrie nennt man das eine auch Grundeck, das andere Polareck.

§. 24.

V. **Lehrsatz. In jedem körperlichen Dreiecke betragen die Flächenwinkel zusammengenommen mehr als zwei und weniger als sechs rechte.**

Beweis. Bezeichnet man die Flächenwinkel mit A, B, C, die gegenüberliegenden Seiten des Polarecks mit a, b, c, so hat man:

$$A + B + C + a + b + c = 6R.$$

Da aber $a + b + c < 4R$ und $> 0R$,

so ist auch: $A + B + C + > 2R$ und $< 6R$.

Zusatz. Ein körperliches Dreieck kann nicht blos drei spitzige, sondern auch drei rechte und auch drei stumpfe Flächenwinkel haben.

§. 25.

VI. **Lehrsatz. Wenn in zwei körperlichen Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich sind, so sind auch die dritten Seiten und die andern Winkel bezüglich gleich.**

Beweis. Sind z. B. in den körperlichen Dreiecken ABCD, abcd, a'bc'd' (Fig. 134.) die Seiten BAD, bad, b'a'd' — BAC, bac, b'a'c', dann die Winkel DBAC, dbac, d'b'a'c' gleich, so sind auch die Seiten DAC, dac, d'a'c' und die Winkel BACD, bacd, b'a'c'd' — BADC, badc, b'a'd'c gleich.

Denn macht man AD, ad, a'd' gleich, zieht auf die gegenüberliegenden Seiten die Senkrechten DE, de, d'e' und construirt die Flächenwinkel DBE, dbe, d'b'e' — DCE, dce, d'c'e' — BFG, bfg, b'f'g' und zieht AE, ae, a'e', so folgt

aus der Congruenz der Dreiecke ABD, abd, a'b'd'

die Congruenz der Dreiecke DBE, dbe, d'b'e', ferner der Dreiecke DEA, dea, d'e'a' — BAE, bae, b'a'e — EAC, eac, e'a'c' — DEC, dec, d'e'c' — DAC, dac, d'a'c'.

Aus der Congruenz dieser Dreiecke folgt aber die Gleichheit der in unserer Thesis angeführten Stücke mit Ausnahme der Winkel BFG, bfg, b'f'g', deren Gleichheit sich übrigens eben so einfach aus der Congruenz von Dreiecken erweisen läßt.

Zusatz mit Erklärung. Es ist augenscheinlich, daß das körperliche Dreieck ABCD sich ganz in das körperliche Dreieck abcd hineingeschoben denken läßt, nicht so in a'b'c'd'. Der Grund ist die umgekehrte Ordnung in der Aufeinanderfolge der Seiten. Solche

Raumecke, in denen die Seiten und Winkel bezüglich gleich, aber die Ordnung der Aufeinanderfolge verkehrt ist, so daß, was bei dem einen rechts ist, bei dem andern links steht, heißen symmetrisch. Das Zeichen für die Symmetrie ist $\overset{\text{ʒ}}{=}$.

Anmerk. Die symmetrische Gleichheit ist nur der Stereometrie eigenthümlich, denn folgen z. B. in einem ebenen Dreieck die Seiten in entgegengesetzter Ordnung, wie in einem andern, so läßt sich durch Umschlagen des einen Dreiecks die gleiche Ordnung der Aufeinanderfolge herstellen, was bei körperlichen Figuren (mit drei Dimensionen) nicht angeht. Ein Beispiel von symmetrischen Figuren hat man in den beiden Händen eines Menschen, wo der rechte Handschuh nicht an die linke Hand paßt und umgekehrt. Weil aber dieses möglich wird, wenn der Handschuh umgewendet wird, so heißt man symmetrische Körper zuweilen auch umgestülpt congruent.

1. Zusatz. Hat ein körperliches Dreieck zwei gleiche Seiten, so hat es diesen gegenüber auch gleiche Winkel, das gleichseitige ist auch gleichwinklig.

2. Zusatz. Hat ein körperliches Dreieck zwei gleiche Winkel, so hat es auch zwei gleiche Seiten, denn sein Supplementareck hat zwei gleiche Seiten, folglich auch zwei gleiche Winkel, woraus wieder die Gleichheit zweier Seiten des gegebenen folgt. Das gleichwinklige körperliche Dreieck ist auch gleichseitig.

§. 26.

VII. Lehrsatz. In jedem körperlichen Dreiecke liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis. Ist in Fig. 134. $\vee$**DAB** $>$ **DAC**, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken **DBE** und **DCE**, die die Kathete **DE** gemeinschaftlich haben **DB** $>$ **DC**, daher auch $\vee$**DBE** $<$ $\vee$**DCE**.

Zusatz. Dem größern Winkel liegt auch die größere Seite gegenüber. (Der Beweis entweder negativ oder auf ähnliche Weise, wie im Lehrsatze aus der Fig. 134. direkt oder auch durch das Supplementareck.)

§. 27.

Aus dem Gang des Beweises im **VI.** Lehrsatze wird man leicht einsehen, daß die Congruenzfälle der ebenen Geometrie auch in der Stereometrie für körperliche Dreiecke stattfinden, nur in dem allgemeineren Sinne, daß dieselben bei entgegengesetzter Lage der bezüglich gleichen Stücke blos symmetrisch sind. Körperliche Dreiecke sind aber

auch dann congruent oder symmetrisch, wenn sie die drei Winkel bezüglich gleich haben, was mittels der Supplementarecke leicht bewiesen werden kann.

Dritter Abschnitt.

Von den durch Ebenen begrenzten Körpern.

§. 28.

Erklärungen.

1) Ein Körper, der nur von Ebenen begrenzt ist, heißt Polyeder (Vielflächner), die begrenzenden Ebenen heißen seine Seiten, nach deren Anzahl man Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder, Dodecaeder u. s. w. unterscheidet, je nachdem der Körper von drei, vier, fünf, acht, zwölf u. s. w. Ebenen begrenzt ist. Diagonallinie heißt jede zwei Eckpunkte des Polyeders verbindende Gerade, die nicht in eine Seite fällt. Eben so ist die Diagonalebene durch drei Eckpunkte oder zwei parallele Kanten gelegt.

2) Ein Polyeder heißt regelmäßig, wenn seine sämmtlichen Seiten congruente regelmäßige Vielecke, und seine Ecken congruent sind.

3) Zwei Polyeder heißen symmetrisch, wenn sowohl die homologen Kanten ihrer bezüglich congruenten Seiten als auch die Seiten selbst in umgekehrter Ordnung auf einander folgen.

4) Wenn man alle Seiten eines körperlichen Ecks durch eine einzige Ebene geschnitten denkt, so heißt der entstehende Körper eine Pyramide. Denkt man sich aber die Kanten nicht in einem Punkte zusammenlaufend, sondern unter sich parallel und dieselben durch zwei beliebige parallele Ebenen geschnitten, so heißt der entstehende Körper ein Prisma. Die Schnittebenen heißen in beiden Fällen die Grundflächen, die andern die Seitenflächen. Nach der Zahl der Eckpunkte der Grundflächen unterscheidet man drei-, vier-, fünf- und mehrseitige Pyramiden und Prismen. Durch Diagonalebenen lassen sich mehrseitige Pyramiden und Prismen in dreiseitige zerlegen. Die Höhe einer Pyramide ist die Entfernung der Spitze von der Grundfläche, eines Prisma, die Entfernung der beiden Grundflächen. Wenn die Pyramide und das Prisma regelmäßige Grundflächen haben, dann heißt die Verbindungslinie der Spitze und des Mittelpunktes der Grundfläche oder beider Mittelpunkte die Achse. Ist die Achse auf der

Grundfläche senkrecht, so heißt die Pyramide und das Prisma regelmäßig. (Die Pyramide auch wohl gleichseitig.)

Im regelmäßigen Prisma sind auch die Seitenkanten, folglich auch die Seiten auf den Grundflächen senkrecht; in der regelmäßigen Pyramide sind die Seitenflächen congruente Figuren, die gegen die Grundfläche gleiche Neigung haben; deßgleichen haben auch die Seitenkanten gegen die Grundfläche gleiche Neigungswinkel.

Sind in einem Prisma die Seiten, folgt auch die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht, ohne Rücksicht auf die Gestalt der Grundfläche, so heißt das Prisma senkrecht, außerdem schief.

Anmerk. Man könnte die Pyramide und das Prisma auch auf folgende Weise erklären: Die Pyramide ist ein Körper, der begrenzt ist von einem Vielecke als Grundfläche, und eben so vielen in einem Punkte zusammenkommenden Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat. Das Prisma ist ein Körper, der begrenzt ist von zwei congruenten und parallelen Vielecken als Grundflächen, und so vielen Parallelogrammen, als die Grundflächen Seiten haben.

5) Sind die Grundflächen eines Prisma Parallelogramme, so daß es von sechs Parallelogrammen begrenzt wird, so heißt es ein Parallelepipedum. Ein senkrechtes Parallelepipedum heißt rechtwinklig, wenn seine Grundflächen Rechtecke sind. Es ist also von sechs Rechtecken begrenzt. Ein von sechs Quadraten begrenztes Parallelepipedum heißt Würfel oder Cubus. Er ist ein regelmäßiges Hexaeder. Ist der Körper von sechs congruenten Rhomben begrenzt, so heißt er Rhomboeder. Ein schiefes Parallelepipedum heißt einfach schief, wenn zwei seiner Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht sind, außerdem doppelt schief. Sind die Grundflächen eines senkrechten Parallelepipedums Rhomben oder Rhomboide, so wird es ein einfach schiefes, wenn man eine der Seitenflächen als Grundfläche betrachtet.

§. 29.

1. Lehrsatz. **Wenn sich zwei Polyeder ABCD, abcd (Fig. 135.) in eine solche Lage bringen lassen, daß ihre entsprechenden Eckpunkte zu beiden Seiten einer Ebene MN in gleicher Entfernung von derselben und in denselben senkrechten Linien Aa, Bb, Cc, Dd liegen, so sind sie symmetrisch.**

Beweis. Sind a′ b′ c′ d′ die Durchschnittspunkte der Senkrechten Aa, Bb, Cc, Dd in der Ebene MN, so folgt aus der Congruenz der rechtwinkligen Trapeze Aa′b′B und aa′b′b, Aa′c′C und aa′c′c u. s. w. die Gleichheit der Kanten AB und ab, AC und ac,

BC und bc u. s. w.; daraus wieder die Congruenz der Seitenflächen und die Gleichheit der Flächenwinkel (§. 27.). Da nun in der angenommenen Lage die entsprechenden Seiten in übereinstimmender Ordnung aufeinander folgen, so muß diese Ordnung geändert werden, sobald man das eine Polyeder durch eine Achsendrehung von 180° in die Lage des andern bringen wollte, folglich sind die beiden Polyeder symmetrisch.

Zusatz. Hätten die beiden Polyeder unter ihren Seiten auch mehrseitige Vielecke, so könnte man sie jedenfalls durch Diagonalebenen in dreiseitig begrenzte zerlegen, so daß der Satz auch für diesen allgemeineren Fall gültig seyn muß.

§. 30.

II. Lehrsatz. **Wird ein Prisma ABCDEFGH (Fig. 136.) durch eine zu der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur JKLM der Grundflächen congruent.**

Beweis. Nach §. 12. Lehrs. VI. sind die Schnittlinien JK, KL, LM, MK bezüglich mit AB, BC, CD, DA parallel, folglich die Winkel derselben bezüglich gleich. Da aber die Vierecke ABKJ, BCKL u. s. w. Parallelogramme sind, so sind die Seiten der Schnittfigur denen der Grundflächen auch gleich, folglich auch JKLM $\cong$ ABCD.

1. Zusatz. Wird eine Pyramide ABCD (Fig. 137. a.) durch eine zur Grundfläche parallele Ebenen geschnitten, so ist die Schnittfigur EFG der Grundfläche ähnlich. Denn die Winkel sind gleich aus dem im Lehrsatze angeführten Grunde, die Proportionalität der Seiten ergiebt sich auf folgende Weise: $EF : AB = DF : DB = FG : BC$, folglich auch $EF : AB = FG : BC$. Eben so für die übrigen Seitenpaare.

2. Zusatz. Werden zwei Pyramiden ABCD, HJKL (Fig. 137. a. b.) von gleicher Höhe in gleichen Abständen von den Grundflächen mittels paralleler Ebenen geschnitten, so verhalten sich die Schnittfiguren EFG und MNO wie die Grundflächen. Denn sind Dn, Ls die Höhen, welche in m und r die Schnittflächen treffen, so sind, wenn man Em, An, Mr und Hs zieht, offenbar die Dreiecke DEm und DAn, LMr und LHs ähnlich, folglich:

$$\triangle EFG : \triangle ABC = EF^2 : AB^2 = DE^2 : DA^2 = Dm^2 : Dn^2 \text{ und}$$

$$\triangle MNO : \triangle HJK = MN^2 : HJ^2 = LM^2 : LH^2 = Lr^2 : Ls^2 = Dm^2 : Dn^2, \text{ folglich}$$

$$\triangle EFG : \triangle ABC = \triangle MNO : \triangle HJK.$$

Sind daher die Grundflächen gleich, so sind es auch die Schnittflächen.

§. 31.

III. **Lehrsatz. Zwei Prismen ABCDE.. JKLMN.. (Fig. 138.) sind congruent, wenn sie beide ein körperliches Eck haben, welches von drei einzelnen congruenten und in übereinstimmender Ordnung auf einander folgenden Seiten gebildet ist.**

Beweis. Unter den gleichen Seiten müssen zwei Grundflächen seyn, z. B. ABCD, JKLM, die sich ganz auf einander legen lassen werden. Sind nun auch noch AF und JO, AH und JQ congruent, so werden die Flächenwinkel an den Kanten AB und JK, AD und JM ebenfalls gleich seyn, daher ebenfalls in einander fallen, mithin auch die gemeinschaftlichen Durchschnittslinien AE und JN. Diese sind aber nach der Annahme gleich, folglich fällt auch N auf E und die beiden andern Grundflächen in eine und dieselbe Ebene. Nun muß auch NO auf EF und NQ auf EH, daher auch NOPQ ganz auf EFGH fallen, also sind die Prismen congruent.

Zusatz. Unter denselben Bedingungen findet auch die Congruenz von Pyramiden statt.

§. 32.

IV. **Lehrsatz. In jedem Parallelepipedum ABCDEFGH (Fig. 139.) sind die gegenüberliegenden Ecke z. B. bei A und G symmetrisch, wenn die drei Seiten der Ecke von ungleicher Größe sind.**

Beweis. Denkt man sich das Eck bei G so umgelegt, daß die Seite FGH auf die gleiche Seite DAB fällt, so wird die zweite Seite FGC des Ecks bei G nicht in die Lage der zweiten gleichen Seite EAD des Ecks bei A, sondern in die Lage der dritten Seite EAB kommen, daher ist die Ordnung der Seiten in beiden Ecken verschieden und dieselben symmetrisch.

1. Zusatz. Wären aber zwei Seiten, z. B. EAD und EAB, einander gleich, so würde ihre verschiedene Stellung die Ordnung nicht ändern, und folglich wären die Ecke congruent.

2. Zusatz. Im senkrechten Parallelepipedum sind die gegenüberliegenden Ecke stets congruent.

3. Zusatz. Theilt man das Parallelepipedum durch eine Diagonalebene z. B. AEGC in zwei dreiseitige Prismen, so sind dieselben nur dann congruent, wenn das Parallelepipedum senkrecht ist. Denn denkt man sich das eine z. B. ABCE.. auf der Grundfläche ABC so lang gedreht, daß sie ganz auf ADC zu liegen kommt, so können die

beiden Seitenkanten AE und CG nur dann zusammenfallen, wenn sie auf der Grundfläche senkrecht sind, in diesem Falle werden sie aber congruent seyn.

§. 33.

V. **Lehrsatz. Zwei Parallelepipeda ABCDEFGH und abcdefgh (Fig. 140.) sind dem körperlichen Inhalte nach gleich, wenn ihre Seitenkanten AE, BF, CG, DH, ae, bf, cg, dh gleich sind und in denselben Geraden liegen.**

Beweis. Denkt man sich den Körper ABCD abcd hinauf gerückt, bis ABCD auf EFGH zu liegen kommt, so wird abcd auf efgh fallen. Da nun auf diese Weise

ABCD abcd = HEFG hefg wird,
und EFGH abcd = EFGH abcd,

so ist auch ABCDEFGH = abcdefgh.

Anmerk. Es ist offenbar, daß dieser Satz auch für jedes andere Prisma gelten wird.

§. 34.

VI. **Lehrsatz. Die zwei dreiseitigen symmetrischen Prismen; in die sich ein schiefes Parallelepipedum (Fig. 141.) zertheilen läßt, sind von gleichem körperlichem Inhalte.**

Beweis. Man lege durch die Seitenkante FB zwei senkrechte Ebenen FJKL, BMNO, welche die Seitenkanten GC, HD, EA und deren Verlängerungen in JKL und MNO schneiden, so erhält man das senkrechte Parallelepipedum BMNOFJKL, welches nach unserm vorhergehenden Satze dem schiefen gleich ist und durch die Diagonalebene BNKF in zwei congruente dreiseitige Prismen zerlegt wird, von denen das eine BNMFKJ = BCDFGH, das andere BNOFKL = BDAFHE, ebenfalls nach unserm vorhergehenden Satze, es ist daher auch BCDFGH = BDAFHE.

§. 35.

VII. **Lehrsatz. Zwei Parallelepipeda von gleichen (gleich großen) Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.**

Beweis. Es seyen die gleichen Grundflächen ABCD, EFGH, (Fig. 142.) und ABCD abcd das Parallelepipedum über der ersteren Grundfläche. Nimmt man nun auf den Verlängerungen der Seiten DC und AB ein Parallelogramm A′B′C′D′ so, daß B′C′ gleich ist

FG, während A'B' gleich AB bleibt, ferner auf den Verlängerungen von A'D' und B'C' ein drittes Parallelogramm E'F'G'H', so daß G'H' gleich ist GH, während F'G' gleich bleibt B'C', so ist leicht einzusehen, daß diese drei Parallelogramme einander gleich und E'F'G'H' ∽ EFGH seyn wird, da es demselben an Flächeninhalt gleich und bezüglich gleiche Seiten hat. Construirt man nun auf A'B'C'D' ein beliebiges Parallelepipedum A'B'C'D' a'b'c'd' von der Höhe des ersten, indem man ab und cd gleichfalls verlängert, deßgleichen das Parallelepipedum E'F'G'H' e'f'g'h' mittels Verlängerung von a'd', b'c', so ist (nach §. 33.) das Parallelepipedum E'F'G'H' e'f'g'h' dem zweiten, folglich auch dem ersten gleich. Nun aber ist das auf EFGH angenommene dem auf E'F'G'H' construirten gleich, mithin auch das auf EFGH construirte dem über ABCD.

1. Zusatz. Als Hälften von Parallelepipeden sind sohin auch dreiseitige Prismen gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

2. Zusatz. Hat ein mehrseitiges Prisma mit einem dreiseitigen gleiche Grundfläche, so läßt sich das mehrseitige durch Diagonalebenen in dreiseitige zerlegen, desgleichen wird sich das Dreieck in einzelne kleinere Dreiecke zerlegen lassen, so daß von beiden Grundflächen je zwei Theile einander gleich sind, hieraus folgt, daß jedes Prisma einem dreiseitigen gleich seyn wird, dessen Grundfläche der Grundfläche des ersteren gleich ist, vorausgesetzt, daß sie gleiche Höhe haben.

3. Zusatz. Prismen sind überhaupt einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben.

§ 36.

VIII. Lehrsatz. Zwei dreiseitige Pyramiden ABCD und EFGH (Fig. 143.) sind gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben.

Beweis. Man denke sich die gleichen Höhen in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, etwa in vier und durch die Theilungspunkte parallele Ebenen zu den Grundflächen gelegt, welche mit den Pyramiden die Schnittfiguren B'C'D', B''C''D'', B'''C'''D''', F'G'H' u. s. w. geben, so werden diese paarweise gleich seyn (§ 30. Zus. 2.). Construirt man nun auf diese Durchschnittsfiguren und zwischen denselben Prismen, und zwar in der Pyramide ABCD von der Grundfläche aufwärts, in der Pyramide EFGH von der obersten Schnittfläche abwärts, so hat man, wenn man die ersteren Prismen mit P, P', P'', P'''...

(äußere Prismen), die letzteren mit p′, p″, p‴... (innere Prismen) bezeichnet, deßgleichen die erste Pyramide mit Π, die letztere mit π:

$$P' = p', \; P'' = p'', \; P''' = p''' \ldots$$

ferner $P + P' + P'' + P''' > \Pi$,

eben so $p' + p'' + p''' < \pi$,

folglich $P > \Pi - \pi$, d. h. die Differenz der Pyramiden ist kleiner, als das erste auf ABC construirte Prisma. Man mag aber die Höhen der Prismen so klein annehmen, als man will, so wird man immer wieder auf dasselbe Resultat kommen, folglich muß die Differenz der Pyramiden Null seyn, sie sind also gleich.

Zusatz. Eben so würde der Satz für mehrseitige Pyramiden bewiesen.

§. 37.

IX. Lehrsatz. **Jedes dreiseitige Prisma ABCDEF (Fig. 144.) ist gleich dreien Pyramiden von der Grundfläche und Höhe des Prisma.**

Beweis. Zieht man DB, BF, so schneidet die Ebene BDF vom Prisma eine Pyramide BDEF ab, welche mit dem Prisma die Grundfläche und Höhe gemein hat. Die übrig bleibende vierseitige Pyramide BADFC kann durch die Diagonalebene ABF in zwei gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, von denen die eine BACF auf der Grundfläche ABC gedacht werden kann und ihre Spitze dann in F hat. Sie ist nothwendig der ersten und folglich sind alle drei gleich.

Zusatz. Jedes Prisma ist gleich dreien Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe, folglich die Pyramide der dritte Theil des Prisma.

§. 38.

X. Lehrsatz. **Wird ein dreiseitiges Prisma durch eine gegen die Grundfläche geneigte Ebene abgekürzt, so ist der übrigbleibende Körper ABCDEF (Fig. 145.) gleich dreien Pyramiden, die die Grundfläche des Prisma zur Grundfläche und ihre Spitzen in den Scheitelpunkten der Schnittfläche haben.**

Beweis. Die durch die Ebene FAB abgeschnittene Pyramide FABC ist eine von den verlangten. Von den beiden aus der Zertheilung der vierseitigen FADEB entstandenen dreiseitigen Pyramiden FADB und FDBC läßt sich die erstere in eine andere gleiche verwandeln, indem man die Spitze F in der zur Grundfläche ADB parallelen

Linie FC nach C verschoben denkt. Man ziehe deßwegen die Seitenkante DC. Denkt man sich diese Pyramide auf der Grundfläche ABC stehend, so wird D die Spitze seyn und wir haben die zweite der verlangten Pyramiden. Endlich kann man der Pyramide FDBE statt DBE die Grundfläche ABE geben, indem man AE zieht. Denkt man sich nun wieder die Spitze F nach C verschoben und CE gezogen, so erhält man dafür die Pyramide CABE, und diese auf die Grundfläche ABC gestellt, kommt die Spitze nach E, wodurch man die dritte der verlangten Pyramiden enthält.

Zusatz. Ist das Prisma ein senkrechtes, so bilden die Kanten die Höhen, ist es aber schief, so läßt es sich mittels einer senkrecht auf die Kanten geführten Schnittfläche in zwei senkrechte zertheilen.

§. 39.

XI. Lehrsatz. **Eine dreiseitige Pyramide ABCDEF (Fig. 146.), welche durch eine parallel zur Grundfläche gelegte Ebene abgekürzt ist, ist gleich dreien Pyramiden, welche die Höhe der abgekürzten Pyramide zur gemeinschaftlichen Höhe haben, zu Grundflächen aber die Grundfläche der abgekürzten Pyramide, die Schnittfläche und die mittlere Proportionalfläche aus beiden.**

Beweis. Zieht man EA, EC und denkt sich durch die Ebene AEC die Pyramide EABC abgeschnitten, so ist diese eine von den verlangten, da sie ihre Spitze in der Schnittfläche und ABC zur Grundfläche hat.

Zieht man ferner AF und denkt sich die vierseitige Pyramide EACFD durch die Ebene EAF in zwei dreiseitige Pyramiden zertheilt, so läßt sich die eine davon EADF auf die Schnittfläche DEF gestellt denken und ist, weil sie dann ihre Spitze in dem Eckpunkt A der Grundfläche ABC hat, gleichfalls eine von den verlangten.

Zieht man EG || FC bis sie BC in G schneidet, dann die beiden Linien GF, GA, so ist die Pyramide GACF der dritten aus der abgekürzten gebildeten Pyramide EACF gleich (§. 36. Lehrs. VIII.). Denkt man sich diese auf die Grundfläche AGC gestellt, so hat sie ihre Spitze in F, folglich die Höhe der abgekürzten Pyramide zur Höhe. Nun aber hat man:

$$ABC : ACG = CB : CG = CB : EF \text{ (Pl. §.40. Zus. 2.)}$$

ferner $ACG : DEF = GC \times AC : EF \times DF = AC : DF$

(Pl. §. 41. Lehrs. VI.)

folglich auch, weil **CB : EF = AC : DF** (§. 30. Zus. 1.)

$$\triangle ABC : ACG = ACG : DEF.$$

Also ist **ACG** die mittlere geometrische Proportionalfläche zwischen **ABC** und **DEF** und **FAGC** die dritte der verlangten Pyramiden.

Zusatz. Dieser Satz gilt auch für eine mehrseitige Pyramide.

§. 40.

XII. Lehrsatz. **Rechteckige Parallelepipeda von derselben oder von congruenten Grundflächen verhalten sich (ihrem körperlichen Inhalte nach) wie ihre Höhen.**

Der Beweis ist dem von §. 40. Lehrs. V. ganz ähnlich.

§. 41.

XIII. Lehrsatz. **Rechteckige Parallelepipeda von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.**

Beweis. Denkt man sich die beiden Parallelepipeda **ABCDE..** und **abcDe..** (Fig. 147.) mit der gleichen Kante **DH** zusammenfallend, so werden die Grundflächen in dieselben Ebenen zu liegen kommen. Denkt man sich nun die Seite **cbfg** erweitert, bis sie **ABFE** in **JK** schneidet, so erhält man ein drittes rechteckiges Parallelepipedum **AJcDEKgH**, und man hat (nach §. 40. Lehrs. XII.)

$$abcDefgH : AJcDEKgH = He : HE, \text{ eben so}$$
$$AJcDEKgH : ABCDEFGH = Hg : HG, \text{ folglich auch}$$

$$abcDefgH : ABCDEFGH = He \times Hg : HE \times HG = Hefg : HEFG.$$

§. 42.

XIV. Lehrsatz. **Rechteckige Parallelepipeda verhalten sich überhaupt, wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe.**

Beweis. Bezeichnet man den Inhalt, die Grundflächen und Höhen zweier rechteckiger Parallelepipeda mit **P**, **p**, **G**, **g**, **H**, **h** und denkt sich ein drittes, dessen Inhalt $\mathfrak{P}$, welches mit dem ersten die Grundfläche **G** mit dem zweiten die Höhe **h** gleich hat, so hat man (nach §. 40. und 41.)

$$P : \mathfrak{P} = H : h,$$
$$\text{eben so } \mathfrak{P} : p = G : g,$$
$$\text{folglich } P : p = G \times H : g \times h.$$

1. Zusatz. Rechteckige Parallelepipeda verhalten sich wie die Produkte dreier zusammenstoßender Kanten.

2. Zusatz. Da jedes schiefe Parallelepipedum einem senkrechten von derselben Grundfläche und Höhe gleich ist, und die Grundfläche, wenn sie ein schiefwinkliges Parallelogramm ist, sich in ein Rechteck verwandeln läßt, so finden die drei letzten Lehrsätze bei allen Parallelepipeden statt. Da ferner jedes dreiseitige Prisma die Hälfte eines Parallelepipedums ist, jedes mehrseitige Prisma in dreiseitige zerlegt werden kann, endlich jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma von derselben Grundfläche und Höhe ist; so gelten die angeführten drei Lehrsätze auch überhaupt für Prismen und Pyramiden.

§. 43.

XV. **Lehrsatz. Man findet den Inhalt eines rechteckigen Parallelepipedums (in Würfeln von beliebiger Kantenlänge), wenn man die auf dieselbe Längeneinheit bezogenen Zahlen dreier zusammenstoßender Kanten multiplizirt oder kürzer ausgedrückt: der Inhalt eines rechteckigen Parallelepipedums ist gleich dem Produkte dreier zusammenstoßender Kanten.**

Beweis. Bezeichnet man allgemein den Inhalt zweier rechteckigen Parallelepipeden in Kubikfußen (c') mit **P** und **P'**, die an einander stoßenden Kanten mit a, b, c, a', b', c', so hat man (nach §. 42. Zus. 1.)

$$P : P' = abc : a'b'c'.$$

Ist nun $P' = 1^{c'}$, so ist die bezügliche Größe von a', b' und c' = 1, mithin $P : 1^{c'} = abc : 1$,

oder $P = abc^{c'}$.

1. Zusatz. Man erhält den Inhalt eines Würfels, wenn man die Zahl seiner Kantenlänge zur dritten Potenz erhebt.

2. Zusatz. Der Inhalt eines Prisma ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, der einer Pyramide ist gleich dem dritten Theil dieses Produktes.

3. Zusatz. Der Inhalt eines schief gegen die Grundfläche abgeschnittenen dreiseitigen Prisma ist gleich dem Produkte aus dem arithmetischen Mittel der drei Seitenkanten und dem senkrechten Durchschnitte des Prisma. Denn bezeichnet man den senkrechten Durchschnitt **GHJ** (Fig. 148.) des schief abgeschnittenen Prisma **ABCDEF** mit **G**, die

durch A, B, C gehenden Kantenabschnitte mit a, a', b, b', c, c', so ist das schief abgeschnittene senkrechte Prisma

$$GHJABC = \frac{a}{3} \times G + \frac{b}{3} \times G + \frac{c}{3} \times G \text{ (§. 38. Zus.)}$$

eben so $$GHJDEF = \frac{a'}{3} \times G + \frac{b'}{3} \times G + \frac{c'}{3} \times G,$$

mithin $$ABCDEF = \frac{G}{3} \times [a + a' + b + b' + c + c']$$

$$= G \times \frac{AD + BE + CF}{3}$$

4. Zusatz. Ein schief abgeschnittenes mehrseitiges Prisma läßt sich als eine Summe zweier oder mehrerer dreiseitiger berechnen; hiebei ist die senkrechte Schnittfläche aus ihren Seiten und Winkeln zu bestimmen.

5. Zusatz. Man findet den Inhalt eines andern unter den betrachteten Fällen nicht enthaltenen Polyeders, wenn man sich dasselbe von einem im Innern des Körpers liegenden Punkte aus in Pyramiden zerlegt denkt und deren Inhalte addirt. Hiebei wird vorausgesetzt, daß man die Höhen der Pyramiden bestimmen kann.

Anmerk. Von einer andern Methode, den Inhalt physischer Körper von polyedrischer oder beliebig anderer Form zu bestimmen, werden wir weiter unten handeln.

§. 44.

Erklärung. Zwei Polyeder heißen ähnlich, wenn sie von paarweise ähnlichen und in übereinstimmender Ordnung liegenden Vielecken begrenzt, die Flächenwinkel paarweise gleich und die Körperwinkel congruent sind.

Zusatz. Die Symmetrie der Ecke, welche bedingt ist von der entgegengesetzten Ordnung der Seiten, führt auf eine blos symmetrische Aehnlichkeit.

§. 45.

XVI. Lehrsatz. **Wenn eine beliebige z. B. eine vierseitige Pyramide ABCD (Fig. 149.) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene FGHJ geschnitten wird, so ist die oben abgeschnittene Pyramide der ganzen ähnlich.**

Beweis. Da die Seiten der Schnittfigur denen der Grundfläche parallel sind (§. 18. Zus. 6.), so sind die Seiten der Pyramiden

paarweise ähnlich. Es ist aber auch die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich und die Seiten liegen in übereinstimmender Ordnung, folglich sind die Ecke bezüglich congruent, daher die Pyramiden ähnlich.

§. 46.

XVII. Lehrsatz. Zwei dreiseitige Pyramiden (Tetraeder) ABCD, abcd (Fig. 150.) sind ähnlich, wenn zwei Seiten in übereinstimmender Ordnung bezüglich ähnlich sind und gleiche Flächenwinkel einschließen.

Dat.: $\triangle abc \sim ABC$, $\triangle abd \sim ABD$, $\angle bacd = \angle BACD$

Beweis. Nimmt man auf der Kante AC ein Stück AF = ac und legt durch c zur Grundfläche BCD eine parallele Ebene EFG, so ist nach dem vorhergehenden Satze $AEFG \sim ABCD$. Nun ist FE || CB und FG || CD, folglich $\angle AFE = \angle ACB = \angle acb$ und $\angle AFG = \angle ACD = \angle acd$, daher $\triangle AFE \cong acb$ und $\triangle AFG \cong \triangle acd$, folglich wird, weil auch die Flächenwinkel an den Kanten AF und ac gleich sind, die Pyramide abcd sich ganz in die Pyramide AEFG legen lassen und derselben congruent, also auch der Pyramide ABCD ähnlich seyn.

Zusatz. Zwei Tetraeder sind ähnlich, wenn unter den obigen Bedingungen der gleiche Flächenwinkel der größern Seite gegenüberliegt.

§. 47.

XVIII. Lehrsatz. Zwei Tetraeder ABCD, abcd (Fig. 150.) sind ähnlich, wenn drei Seiten in übereinstimmender Ordnung bezüglich ähnlich sind.

Dat.: $\triangle abc \sim \triangle ABC$, $\triangle abd \sim \triangle ABD$, $\triangle adc \sim \triangle ACD$

Beweis. Aus der Annahme folgt unmittelbar, daß die Körperwinkel bei a und A congruent sind (vergl. §. 27.). Es läßt sich also die Pyramide abcd so in ABCD hineinlegen, daß die Ecke a und A zusammenfallen, in welchem Falle dann, wie leicht einzusehen, die Grundflächen bcd und BCD parallel werden.

Zusatz. Tetraeder sind ähnlich, wenn alle Kanten in übereinstimmender Ordnung proportional sind.

§. 48.

XIX. Lehrsatz. **Zwei Tetraeder ABCD; abcd (Fig. 150.) sind ähnlich, wenn die Grundflächen ähnliche Dreiecke und die daran liegenden Flächenwinkel in übereinstimmender Ordnung bezüglich gleich sind.**

Dat.: $\triangle bcd \backsim \triangle BCD$ $\vee acdb = \vee ACDB$ $\vee abdc = \vee ABDC$ $\vee abcd = \vee ABCD$	Beweis. Macht man dieselbe Construktion wie in Lehrsatz XVII., so sind die Flächenwinkel an der Schnittfläche denen an der Grundfläche BCD, folglich auch denen an

bcd gleich, daher werden, wenn die Grundfläche bcd auf EFG gelegt wird, die Flächenwinkel, also auch die Kanten zusammenfallen und es ist abcd $\cong$ AEFG und folglich auch ähnlich ABCD.

1. Zusatz. Aehnliche mehrseitige Pyramiden lassen sich in dreiseitige Pyramidenpaare zerlegen, welche gleichfalls ähnlich sind.

2. Zusatz. Aehnliche Polyeder lassen sich in ähnliche Pyramidenpaare zerlegen.

3. Zusatz. Die Oberflächen ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Kanten.

4. Zusatz. Die körperlichen Inhalte ähnlicher Pyramiden, folglich ähnlicher Polyeder überhaupt verhalten sich, wie die Würfel entsprechender Kanten.

§. 49.

XX. Lehrsatz. **Es sind nur fünf regelmäßige Polyeder möglich.**

Beweis. Die Seiten eines körperlichen Ecks müssen zusammengenommen weniger betragen als vier rechte. Nun ist aber der Winkel im regelmäßigen Dreiecke gleich $^2/_3$ R, sohin können entweder drei, oder vier, oder fünf regelmäßige Dreiecke ein körperliches Eck bilden; sechs würden zusammengenommen 4 R betragen, folglich eine einzige Ebene bilden. Mit Quadraten ist nur ein körperliches Dreieck möglich, eben so mit regelmäßigen Fünfecken, wo drei Winkel $3 \times {}^6/_5$ R $= 3^3/_5$ R betragen. Mit regelmäßigen Sechsecken ist gar kein Eck möglich, da $3 \times {}^4/_3$ R $=$ 4 R eine Ebene bilden.

§. 50.

Um zu beweisen, daß in allen fünf angeführten Fällen sich die Ecke zu regelmäßigen Körpern schließen lassen, sind folgende Sätze vorauszuschicken.

XXI. Lehrsatz. In jedem Netze aneinander hängender ebener Figuren, es mögen dieselben in einer Ebene liegen oder nicht, ist die Anzahl der Figuren und Ecke um eins größer als die Anzahl der Verbindungs- und äußeren Begrenzungslinien.

Bezeichnet man nämlich die Anzahl der verbundenen Figuren mit F, die der Ecke mit E, die der Verbindungs- und Begrenzungslinien mit K, so ist

Thesis: $F + E = K + 1$.

Beweis. Hängt man an das Netz eine neue Figur von n Seiten, welche n' Linien mit dem Netze gemein hat und n'' nicht gemein, so wird man folgende Gleichungen haben:

$n = n' + n'' \ldots (1)$ $F' = F + 1 \ldots (2)$ $K' = K + n'' \ldots (3)$
(wenn F' u. K' die Zahl der Figuren und Linien des neuen Netzes ist.)

Die n'' nicht gemeinschaftlichen Linien bilden offenbar $n'' - 1$ neue Ecke, so daß, wenn E' die Anzahl der Ecke des neuen Netzes ist, $E' = E + n'' - 1$ seyn wird.... (4)

Addirt man die Gleichungen (2) und (4) während (3) abgezogen wird, so erhält man:

$$F' = F + 1.$$
$$(+) \quad E' = E + n'' - 1 = F' + E' = F + E + n''$$
$$(-) \quad K' = K + n'' =$$
$$F' + E' - K' = F + E - K.$$

Diese Gleichung beweist, daß die Summe der Figuren und Ecke weniger der Anzahl der Linien immer dieselbe Zahl gibt, welches auch die Zahl der Figuren seyn mag.

Hat man nun aber eine Figur von n Seiten, so ist

$$F' + E' - K' = F + E - K = 1 + n - n = 1,$$
folglich $F + E = K + 1$.

1. Zusatz. Schließt man daher ein an einer Seite offenes Polyeder, so erhält man dadurch wohl eine Figur mehr, aber keine Linie und kein Eck, so daß in diesem Falle die Gleichung statt finden wird:

$$F + E = K + 2, \text{ also auch } K - F = E - 2.$$

2. Zusatz. Bezeichnet man die Seitenzahl der einzelnen Figuren eines Polyeders mit $n, n', n'', n''' \ldots$, so ist offenbar die Summe aller Linienwinkel des Polyeders:

$(2n - 4) R + (2n' - 4) R + (2n'' - 4) R + (2n''' - 4) R =$
$[2n + 2n' + 2n'' + 2n''' + \ldots - (4 + 4 + 4 + 4 + \ldots)] R$
oder $(2(n + n' + n'' + n''' + \ldots) - 4F) R$ (weil F die Anzahl

der Figuren bedeutet). Da aber $n + n' + n'' + n''' + \ldots$ die doppelte Anzahl der Kanten des Polyeders ist, so hat man statt der letzten Gleichung für die Summe (S) aller Linienwinkel:

$$(2 + 2\,K - 4\,F)\,R = S,$$

oder $(4\,K - 4\,F)\,R = S$, oder $4\,(K - F)\,R = S$.

Da aber (Zus. 1.) $K - F = E - 2$, so ist $4\,(E - 2)\,R = S$, d. h. man erhält die Summe aller Linienwinkel, wenn man die um zwei verminderte Zahl der Ecke mit 4 R multiplizirt.

§. 51.

XXII. Lehrsatz. **Es giebt fünf regelmäßige Polyeder, nämlich für dreiseitige Ecke das von vier regelmäßigen Dreiecken begrenzte regelmäßige Tetraeder, das von sechs Quadraten begrenzte Hexaeder (Würfel) und das von zwölf Fünfecken begrenzte Dodecaeder, für vier- und fünfseitige Ecke nur das Oktaeder und Ikosaeder, von denen das erste acht, das letzte zwanzig Dreiecke zur Oberfläche hat.**

Beweis. a) Ist n die Anzahl der Dreiecke, die erforderlich sind, um einen geschlossenen Körper mit körperlichen Dreiecken zu bilden, so daß also $F = n$; so st, wenn man die Zahl der Linienwinkel mit W bezeichnet,

$W = 3\,n$, daher (in obiger Bedeutung)

$E = \frac{3n}{3} = n$. Da aber $E + F = K + 2$, so ist

$n + n = K + 2$, oder

weil $K = \frac{3n}{3}$ $\quad 2n = \frac{3n}{2} + 2$,

woraus folgt, daß $\frac{n}{2} = 2$ oder $n = 4$ ist, d. h. es sind um bei dreiseitigen Ecken mit Dreiecken den Körper zu schließen, 4 Dreiecke erforderlich, wie wir bereits gesehen haben.

b) Unter gleicher Bedeutung der obigen Buchstaben finden wir bei dem aus Dreiecken gebildeten körperlichen Viereck

$W = 3n$

$E = \frac{3n}{4}$ und weil $E + F = K + 2$,

$$\frac{3n}{4} + n = \frac{3n}{2} + 2,$$

oder $\frac{n}{4} = 2$, und $n = 8$.

c) Für das körperliche Fünfeck, aus Dreiecken gebildet

$$W = 3n$$

$$E = \frac{3n}{5} \text{ und weil } E + F = K + 2,$$

$$\frac{3n}{5} + n = \frac{3n}{2} + 2,$$

$$\text{oder } \frac{n}{10} = 2, \text{ und } n = 20.$$

d) Für das aus Vierecken (Quadraten) gebildete körperliche Dreieck:

$$W = 4n$$

$$E = \frac{4n}{3} \text{ und weil } E + F = K + 2,$$

$$\frac{4n}{3} + n = 2n + 2 \ (K = \frac{4n}{2} = 2n),$$

$$\text{oder } \frac{n}{3} = 2 \text{ und } n = 6.$$

e) Für das aus Fünfecken gebildete körperliche Dreieck:

$$W = 5n$$

$$E = \frac{5n}{3} \text{ und weil } E + F = K + 2,$$

$$\frac{5n}{3} + n = \frac{5n}{2} + 2,$$

$$\text{oder } \frac{n}{6} = 2 \text{ und } n = 12.$$

Zusatz. Das Tetraeder hat $\frac{4 \times 3}{3} = 4$ Ecke und sechs Kanten

Das Oktaeder hat $\frac{8 \times 3}{4} = 6$ Ecke und zwölf Kanten.

Das Isokaeder hat $\frac{20 \times 3}{5} = 12$ Ecke u. dreißig Kanten.

Das Hexaeder hat $\frac{6 \times 4}{3} = 8$ Ecke und zwölf Kanten.

Das Dodecaeder hat $\frac{12 \times 5}{3} =$ Ecke u. dreißig Kanten.

Anmerk. Wendet man die allgemeine Formel $E + F = K + 2$ als Probe an, so erhält man:

a) Für das Tetraeder $4 + 4 = 6 + 2$;
b) Für das Oktaeder $6 + 8 = 12 + 2$;
c) Für das Ikosaeder $12 + 20 = 30 + 2$;
d) Für das Hexaeder $8 + 6 = 12 + 2$;
e) Für das Dodekaeder $20 + 12 = 30 + 2$.

§. 52.

XXIII. Lehrsatz. Jedes reguläre Polyeder hat einen Punkt, der von den Ecken, sowie von den Seiten gleichweit entfernt ist, d. h. einen Mittelpunkt.

Beweis. Es seyen **ABC** und **ABD** (Fig. 151.) zwei zusammenstoßende Seiten eines solchen Polyeders, **E** und **F** die Mittelpunkte dieser Seiten. Zieht man von diesen Punkten **EG** und **FG** senkrecht auf **AB**, welche nothwendig in **G** zusammentreffen müssen, so wird **EGF** der Flächenwinkel an der Kante **AB** nnd die Ebene desselben auf den beiden Seiten **ABC** und **ABD** senkrecht seyn. Zieht man in dieser Ebene $EO \perp EG$ und $FO \perp FG$, so wird der Durchschnittspunkt **O** von den Punkten **A**, **B**, **C**, **D** gleich weit entfernt seyn. Zieht man nun an den Mittelpunkt **J** einer dritten an **BC** liegenden Seite **BCH** die Gerade **OJ** und auf **BC** die Senkrechten **EK** und **JK**, so sind offenbar die Vierecke **OEGF** und **OJKE** congruent, folglich $OJ = OE = OF$ und **OJ** auf **CBH** senkrecht, also **O** von **H** eben so weit entfernt, als von **A**, **B**, **C**, **D**. Auf dieselbe Art läßt sich der Satz für die übrigen Seiten und Eckpunkte beweisen.

1. Zusatz. Man erhält den Mittelpunkt eines regelmäßigen Polyeders, indem man aus den Mittelpunkten zweier Seiten senkrechte Linien errichtet, die sich nothwendig in einem Punkte schneiden müssen.

2. Zusatz. Legt man Ebenen durch den Mittelpunkt und die Kanten eines regelmäßigen Polyeders, so wird dasselbe in eben so viele congruente regelmäßige Pyramiden zerlegt, als das Polyeder Seiten hat, so daß der Inhalt desselben durch die Seite und die Entfernung derselben vom Mittelpunkte bestimmt ist.

Vierter Abschnitt.

Von den drei runden Körpern.

§. 53.

Erklärungen.

1. Dreht sich ein Rechteck **ABCD** um eine seiner Seiten, z. B. **AB**, als Achse, so erzeugt es einen (Umdrehungs=) Körper, den man Cylinder (Walze) heißt. Die von **AD**, und **BC** beschriebenen, auf

der Achse senkrechten Kreisebenen, heißen die Grundflächen, die von CD erzeugte einfach gekrümmte Fläche der Mantel des Cylinders und die erzeugende Gerade in jeder ihrer Lagen eine Seite desselben. Aehnliche Rechtecke erzeugen ähnliche Cylinder (für homologe Achsen).

Zusatz. Eine Ebene berühret einen Cylinder in einer Geraden. Zwei Berührungsebenen schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind, in einer zur Achse parallelen Geraden.

Die Mantelfläche eines Cylinders ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche des Cylinders und dessen Höhe der Seite desselben, also auch der Achse, gleich ist.

2. Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck ABC um eine seiner Katheten z. B. um AB, so erzeugt es einen Körper, den man Kegel nennt. Die von der Kathete BC beschriebene, auf der Achse AB senkrechte Kreisebene heißt die Grundfläche, der Punkt A die Spitze, die von der Hypotenuse erzeugte einfach gekrümmte Fläche heißt der Mantel des Kegels und die erzeugende Hypotenuse die Seite desselben. Die Achse des Kegels ist auch seine Höhe. Aehnliche rechtwinklige Dreiecke erzeugen ähnliche Kegel.

Zusatz. Eine Ebene berührt einen Kegel in einer Geraden; zwei Berührungsebenen schneiden sich in einer durch die Spitze gehenden Geraden. Die Mantelfläche eines Kegels ist einem Kreisausschnitte gleich, dessen Halbmesser der Seite des Kegels und dessen Bogen der Peripherie der Grundfläche gleich ist.

Anmerk. Denkt man sich beim Cylinder oder Kegel die Achse schief auf der Grundfläche, in welchem Falle der Körper aber nicht durch Umdrehung einer ebenen geradlinigen Figur um eine Achse erzeugt werden kann, so heißt der Cylinder schief und der Kegel ungleichseitig. Die Bestimmung der Mantelfläche gehört in diesem Falle nicht in das Gebiet der Elementargeometrie, die des körperlichen Inhalts nur dann, wenn, wie in den ersten Fällen, die Grundflächen Kreise sind.

3. Dreht sich ein Trapez mit zwei rechten Winkeln um die seiner Höhe gleiche Seite, so erzeugt es einen (parallel zur Grundfläche) abgekürzten Kegel, dessen Mantel die Differenz zweier Kreisausschnitte ist und als Trapez berechnet werden kann.

§. 54.

1. **Lehrsatz. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus dessen Grundfläche und Höhe.**

Beweis. Denkt man sich auf der mit dem Halbmesser $AB = r$ (Fig. 152.) beschriebenen Kreisfläche einen Cylinder von der Höhe h, so ist, wenn man den Inhalt desselben mit C und die Kreislinie mit p bezeichnet

$$C = \frac{r}{2} ph. \quad \text{(Thesis).}$$

Denn wäre $C > \frac{r}{2} ph$, so könnte ein anderer Cylinder C' von derselben Höhe und auf der mit $AC = r'$ (wo $r' > r$) beschriebenen Kreisfläche dem Produkte $\frac{r}{2} ph$ gleich seyn, so daß man hätte:

$$C' = \frac{r}{2} ph \dots (1).$$

Denkt man sich nun um den mit AB beschriebenen Kreis ein regelmäßiges Polygon construirt, dessen Seiten die Peripherie p' des mit AC construirten Kreises nicht treffen, dann auf dasselbe ein senkrechtes Prisma von der Höhe h, so hat man, wenn man den Inhalt des Prisma mit Pr und den Umfang seiner Grundfläche mit u bezeichnet; nach §. 59. Zus. 3.:

$$Pr = \frac{r}{2} uh \dots (2).$$

Daher (nach 1. und 2.)

$$C' : Pr = \frac{r}{2} ph : \frac{r}{2} uh = p : u,$$

was unmöglich ist, da das erste Verhältniß fällt, während das zweite steigt. Es kann also C nicht kleiner seyn als $\frac{r}{2} ph$. Eben so beweist man, daß C auch nicht größer ist, folglich muß $C = \frac{r}{2} ph$ seyn.

1. Zusatz. Da $\frac{r}{2} p = r^2\pi$, so ist $C = r^2\pi h$.

2. Zusatz. Ist für einen andern Cylinder C' der Halbmesser gleich R und die Höhe gleich H, so hat man:

$$C : C' = r^2\pi h : R^2\pi H = r^2 h : R^2 H,$$
$$= r^2 : R^2, \text{ wenn } h = H,$$
$$= h : H, \text{ wenn } r = R,$$

d. h. zwei Cylinder verhalten sich allgemein, wie die Produkte ihrer Höhen in die Quadrate ihrer Halbmesser; wenn aber ihre Höhen gleich sind, wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Grundflächen und wenn die Grundflächen gleich sind, wie ihre Höhen.

3. Zusatz. Sind die die Cylinder erzeugenden Rechtecke **ABCD** **abcD** (Fig. 153.) ähnlich, in welchem Falle die Cylinder selbst ähnlich heißen, so hat man, wenn man $Da = h$ $DA = H$, $Dc = r$ und $DC = R$ setzt:

$$h : H = r : R, \text{ folglich } h = \frac{Hr}{R}.$$

Setzt man diesen Werth in die allgemeine Proportion des Zusatzes **2**, so erhält man:

$$C : C' = r^2 \times \frac{Hr}{R} : R^2H = r^3 : R^3 = h^3 : H^3,$$

d. h. ähnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel der Halbmesser ihrer Grundflächen oder ihrer Höhen; mithin auch wie die Würfel ihrer Umfänge.

4. Zusatz. Ist in der allgemeinen Proportion $C = C'$, so ist auch $r^2h = R^2H$, mithin $r^2 : R^2 = H : h$ oder $r : R = \sqrt{H} : \sqrt{h}$, d. h. bei gleichen Cylindern verhalten sich die Höhen umgekehrt, wie die Quadrate der Halbmesser oder die Halbmesser, umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.

5. Zusatz. Der Inhalt eines schief gegen die Grundfläche abgekürzten Cylinders ist gleich einem ganzen Cylinder von derselben Grundfläche und einer Höhe, die der verkürzten Achsenlänge gleich ist. (Beweis?)

§. 55.

II. Lehrsatz. **Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem Produkte aus dessen Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.**

Der Beweis wird mittels einer umgeschriebenen regelmäßigen Pyramide wie im vorigen Lehrsatze geführt.

Zusatz. Zwei Kegel verhalten sich ihrem Inhalte nach allgemein wie die Produkte ihrer Höhen in die Quadrate der Halbmesser ihrer Grundflächen. — Kegel von gleicher Höhe verhalten sich, wie die Quadrate der Halbmesser, von gleicher Grundfläche, wie ihre Höhen, ähnliche Kegel wie die Würfel ihrer Höhen, Seiten, Halbmesser, folglich auch der Umfänge ihrer Grundflächen. — Bei gleichen Kegeln verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Quadrate der Halbmesser.

§. 56.

III. Lehrsatz. Der Inhalt eines parallel zur Grundfläche abgekürzten Kegels ist gleich dreien Kegeln, welche die Höhe des abgekürzten zur gemeinschaftlichen Höhe haben, zu Grundflächen aber die Grund- und Schnittfläche des abgekürzten und die mittlere geometrische Proportionalfläche aus beiden.

Beweis. Ergänzt man den abgekürzten Kegel ABCDEF (Fig. 154.) und construirt eine dreiseitige Pyramide MNOP, deren Grundfläche MNO der Grundfläche DEF des Kegels und deren Höhe PR der Höhe ST des ganzen Kegels gleich ist, so wird, wenn die Pyramide in einem Abstande $QR = UT$ (Höhe des abgekürzten Kegels) parallel zur Grundfläche nach VWX geschnitten wird, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke MNO, VWX:

$$\triangle MNO : \triangle VWX = PR^2 : PQ^2, \text{ deßgleichen}$$

$$\text{Kreis } DEF : \text{Kreis } ABC = DF^2 : AU^2 = ST^2 : SU^2$$
$$= PR^2 : PQ^2, \text{ mithin hat man:}$$

$$\triangle MNO : \triangle VWX = \text{Kreis } DEF : \text{Kreis } ABC.$$

Da nun nach der Annahme die Vorderglieder dieser Proportion gleich sind, so müssen auch die Hinterglieder gleich seyn, folglich auch der Ergänzungskegel der Ergänzungspyramide und der abgekürzte Kegel der abgekürzten Pyramide. Die letztere ist aber dreien Pyramiden gleich, die selbst wieder dreien Kegeln von bezüglich gleichen Grundflächen und Höhen gleich seyn werden. Diese Grundflächen und Höhen sind aber die in unserem Lehrsatze angeführten.

§. 57.

Erklärungen und Folgerungen.

1. Dreht sich ein Halbkreis ABDEF (Fig. 155.) um seinen Durchmesser AF als Achse, so beschreibt derselbe einen von einer einzigen krummen Fläche (Kugelfläche) so begrenzten Körper (Kugel), daß alle Punkte seiner Oberfläche von einem und demselben Punkte (Mittelpunkte) gleichweit entfernt sind. Der Mittelpunkt C des erzeugenden Halbkreises ist auch der Mittelpunkt der Kugel. Alle Halbmesser der Kugel, desgleichen alle Durchmesser sind einander gleich.

2. Alle senkrechten Ordinaden des Durchmessers **AF**, als **HB**, **GD**, **CE**, erzeugen Kreisflächen, die sämmtlich auf der Achse senkrecht sind, und Parallelkreise genannt werden. Der größte derselben, der durch den Mittelpunkt **C** geht, heißt Aequator. Sämmtliche Punkte der Peripherie eines Parallelkreises sind von jedem Endpunkte der Drehungsachse **AF** gleichweit entfernt. Diese beiden Punkte heißen die Pole des Parallelkreises. Der erzeugende Halbkreis mit seiner Ergänzung heißt in jeder seiner Lagen Meridiankreis.

Jeder beliebige Durchmesser der Kugel kann als Achse gedacht werden und hat seine eigenen Meridian- Aequator- und Parallel-Kreise.

3. Jeder Durchschnitt der Kugel mittels einer Ebene ist (nach §. 5. Zusatz 6.) ein Kreis. Alle Kreise, die ihren Mittelpunkt im Mittelpunkte der Kugel haben und einander gleich sind, heißen größte Kugelkreise. Der Durchschnitt zweier ist ein Durchmesser der Kugel. Ihr Neigungswinkel wird gemessen durch den Bogen eines dritten größten Kreises, dessen Pole die Endpunkte des genannten Durchmessers sind. Stehen zwei größte Kreise auf einander senkrecht, so geht jeder durch die Pole des andern.

Der von zwei größten Kreisen und dem eingeschlossenen Theil der Kugeloberfläche (Kugelzweieck) begrenzte Körper heißt Kugelkeil. Zwei größte Kreise theilen die Kugel in vier solche Keile.

4. Drei größte Kreise haben den Mittelpunkt der Kugel zum gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte und theilen die Kugel in acht Kugelpyramiden, deren Grundflächen die begrenzten Theile der Kugelfläche sind und Kugeldreiecke oder sphärische Dreiecke heißen. Die Bögen der größten Kreise sind die Seiten, die Flächenwinkel derselben sind die Winkel der Kugeldreiecke. Die letzteren werden gemessen durch die Winkel, welche die Tangenten der zusammenstoßenden Seiten bilden; diese haben aber selbst wieder die größten Kreisbögen zum Maße, welche jene zwei Punkte der Seiten oder ihrer Verlängerungen verbinden, die von den Winkelspitzen um 90° entfernt sind und von welchen die Winkelspitzen selbst die Pole sind.

5. Zwischen den Seiten und Winkeln der Kugeldreiecke finden ähnliche Beziehungen statt, wie zwischen denen der körperlichen Dreiecke. So läßt sich mittels der körperlichen Dreiecke leicht nachweisen: a) In jedem Kugeldreiecke ist jede Seite kleiner, als die Summe der beiden andern; b) die Summe der drei Seiten ist kleiner, als der Um-

fang eines größten Kreises. (Eben so für das Kugelvieleck). c) Im gleichschenkeligen Kugeldreiecke liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt ist ein Kugeldreieck gleichschenklig, wenn es zwei gleiche Winkel hat, (das gleichseitige ist gleichwinklig und umgekehrt). d) In jedem Kugeldreiecke liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber und umgekehrt. Eben so sind Kugeldreiecke in denselben Fällen congruent oder blos symmetrisch gleich, wo es körperliche Dreiecke sind. Daß sie dabei zu einer und derselben oder zu gleichen Kugeln gehören müssen, versteht sich von selbst.

Für Kugeldreiecke von verschiedenen Kugeln findet in ähnlicher Weise wie für dreiseitige Pyramiden die Aehnlichkeit statt.

6. Jede Durchschnittsebene theilt die Kugel in zwei Abschnitte, deren Höhe die Entfernung des Pols von der schneidenden Kreisebene ist; der Mittelpunkt der Kugel liegt im großeren Abschnitte. Eine Schnittebene durch den Mittelpunkt giebt zwei Halbkugeln. Man kann sich den Kugelabschnitt durch Umdrehung eines halben Kreisabschnittes um seine Höhe erzeugt denken.

Der zwischen zwei parallelen Schnittebenenen liegende Theil einer Kugel heißt Kugelrumpf. Man kann sich denselben durch Umdrehung der halben Differenz zweier Kreisabschnitte erzeugt denken.

Der zu einem Abschnitt gehörige Theil der Kugelfläche heißt Kugelmütze, beim Kugelrumpf Zone.

Der von einer Kugelmütze und einem umschließenden Kegelmantel, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel ist, begrenzte Theil der Kugel heißt Kugelausschnitt. Die Kugelmütze ist die Grundfläche des Ausschnitts. Man kann sich denselben durch Umdrehung eines Kreisausschnittes um einen seiner Halbmesser erzeugt denken.

7. Eine Kugel heißt in ein Polyeder eingeschrieben, wenn jede Seite des letzteren die Kugeloberfläche berührt, und zwar wie sich leicht nachweisen läßt, in einem einzigen Punkte. Die Kugel heißt umgeschrieben, wenn ihre Oberfläche durch alle Eckpunkte des Polyeders geht.

Zu jedem regelmäßigen Polyeder läßt sich eine um- und eingeschriebene Kugel denken; folglich ist der Inhalt eines regelmäßigen Polyeders gleich dem Produkte aus seiner Oberfläche in den dritten Theil des Halbmessers der eingeschriebenen Kugel (vergl. §. 43. Zus. 2. und §. 52. Zus. 2.).

§. 58.

IV. **Lehrsatz. Durch vier nicht in einer einzigen Ebene liegende Punkte A, B, C, D (Fig. 156.) ist eine Kugelfläche vollkommen bestimmt.**

Beweis. Legt man durch drei Punkte den Kreis **ABC**, so wird eine im Mittelpunkte **E** desselben auf die Kreisebene gezogene Senkrechte **FEG** die Richtung der Drehungsachse bestimmen. Eine durch **FEG** und **D** gelegte Ebene wird die Kreisebene nach der Geraden **JEH** schneiden. Da nun der erzeugende Halbkreis die Linie **HD** offenbar als Sehne enthalten muß, so wird der Mittelpunkt in der Senkrechten liegen, die man aus dem Halbirungspunkte **K** der Geraden **HD** in der Ebene **FEGD** errichtet; da dieser aber auch auf **FEG** liegen muß, so ist es der Durchschnittspunkt **L** beider Geraden.

§. 59.

V. **Lehrsatz. Der Durchschnitt zweier Kugeln ist ein Kreis.**

Beweis. Denkt man sich durch die Centrallinie **AB** (Fig. 157.) eine Ebene gelegt, so müssen die beiden erzeugenden Halbkreise **CDE** und **FDG** sich nothwendig in einem Punkte **D** schneiden. Die von **D** auf **AB** gefällte Senkrechte **DH** erzeugt aber bei der Umdrehung einen Kreis und **D** offenbar den Durchschnitt der beiden Kugelflächen.

§. 60.

VI. **Lehrsatz. Wenn man die drei Seiten eines Kugeldreiecks ABC (Fig. 158.), dessen Seiten kleiner sind, als ein Quadrant, paarweise zu Quadranten ergänzt, nämlich zu ABG, ACH, BCJ, BAK, CAL, CBM, und durch die Endpunkte die Bogen größter Kreise GH, JK, LM legt, die sich verlängert in D, E, F schneiden, so sind D, E, F auch die Pole von BC, AC, AB.**

Beweis. Da **A** der Pol von **EF** ist, so ist **AE** ein Quadrant. Aus demselben Grunde ist auch **CE** ein Quadrant, folglich **E** der Pol von **AC**. Ebenso kann man beweisen, daß **D** der Pol von **BC** und **F** der Pol von **AB** ist.

Zusatz. Wie das Dreieck **DEF** aus **ABC** gefunden wurde, eben so kann man **ABC** aus **DEF** finden. Es ist aber nicht nothwendig, daß alle Seiten zugleich entweder kleiner oder größer seyn müssen, als ein Quadrant.

§. 61.

VII. Lehrsatz. **Die beiden Kugeldreiecke ABC und DEF (Fig. 158.) stehen in einer solchen Beziehung, daß die Seiten des einen die Supplemente der gegenüberliegenden Winkel des andern sind, und umgekehrt.**

Beweis. Da E der Pol von HCAL und F von GBAK ist, so sind EH und GF Quadranten und folglich ist der Bogen EF um GH kleiner als die halbe Peripherie oder GH das Supplement von EF. Da aber auch A der Pol von EGHF ist und also GH den Winkel A mißt, während EF die gegenüberliegende Seite des Dreiecks DEF ist, so steht der Winkel A zur gegenüberliegenden Seite EF in der angegebenen Beziehung. Eben so könnte man den Satz beweisen für den Winkel B und die Seite DF, desgleichen für C und DE, für D und BC, E und AC, F und AB

Anmerk. Denkt man sich das eine von zwei Supplementarecken umgestülpt und die beiden Ecken mit ihren Spitzen so zusammenfallend, daß die Kanten des einen auf den entsprechenden Seiten des andern senkrecht stehen, ferner aus der gemeinschaftlichen Spitze als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben, so erzeugen die Durchschnitte der Seiten der Supplementarecke mit der Kugeloberfläche die in unserm Lehrsatze betrachteten Kugeldreiecke, von denen das eine das Grundeck, das andere das Polareck heißt, welche Benennungen wir auch schon für die Supplementarecke gebraucht haben (vergl. §. 23.).

§. 62.

VIII. Lehrsatz. **Der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie der Winkel des Zweiecks zu vier Rechten.**

Der Beweis ist dem in Pl. §. 40. Lehrs. V. ganz ähnlich.

§. 63.

IX. Lehrsatz. **Symmetrische Kugeldreiecke ABC, DEF (Fig. 159.) haben gleichen Flächeninhalt.**

Beweis. Es sey AB = DE, AC = DF und BC = EF. Man ziehe aus dem Pol P des durch die Punkte A, B, C gelegten kleinern Kreises die Bogen größter Kreise PA, PB, PC und mache $\vee$DFQ = $\vee$ACP, $\vee$FDQ = $\vee$CAP, so werden die beiden Kugeldreiecke PAC und QDF congruent und die Seiten AP und DQ, CP und FQ bezüglich gleich seyn. Da aber auch die Winkel PAB und

QDE, **PCB** und **QFE** als Differenzen von gleichen Winkeln ebenfalls gleich seyn müssen, so sind auch die Dreiecke **PAB** und **QDE**, **PCB** und **QFE** congruent, folglich die Dreiecke **ABC** und **DEF** als Summen von gleichen Theilen gleich groß.

Zusatz. Lägen die Pole **P** und **Q** außerhalb der Dreiecke **ABC** und **DEF**, so müßte man von den Summen je zweier Dreiecke die dritten subtrahiren.

§. 64.

X. Lehrsatz. **Wenn sich zwei größte Kreise ABC, DBE (Fig. 160.) auf einer Halbkugel, deren Grundfläche AECD ist, in einem Punkte B schneiden, so sind die beiden dadurch entstehenden Kugeldreiecke ABD und BCE zusammengenommen einem Zweiecke gleich, dessen Winkel gleich DBA ist.**

Beweis. Denkt man sich die beiden Bögen **ABC** und **DBE** verlängert, bis sie sich auf der andern Halbkugel in **F** schneiden, so ist **ABC** = **BCF** eine halbe Peripherie und wenn man beiderseits **BC** abzieht **AB** = **CF**. Aus demselben Grunde ist **DB** = **FE** und **DA** = **CE**. Mithin $\triangle$**ABD** = $\triangle$**CEF**. Da nun **BCE** und **CEF** zusammen das Zweieck **BEFCB** geben, so muß auch $\triangle$**ABD** und $\triangle$**BCE** demselben Zweieck gleich seyn.

§. 65

XI. Lehrsatz. **Der Flächeninhalt eines Kugeldreiecks ABC (Fig. 161.) verhält sich zur halben Kugeloberfläche, wie der Ueberschuß seiner drei Winkel über zwei rechte zu vier rechten.**

Beweis. Verlängert man die drei Seiten des Dreiecks bis sie den größten Kreis **DEFGHJ** schneiden, so sind die zwei Dreiecke **HAG** und **ADE** zusammengenommen einem Zweieck mit dem Winkel **A** gleich. Bezeichnen wir der Kürze halber den Inhalt dieses Zweiecks mit **a**, eben so den Inhalt von **JBD** und **BFG** mit **b** und von **FCE** und **CHJ** mit **c**, ferner den Inhalt der halben Kugeloberfläche mit **O** und den des Dreiecks **ABC** mit $\triangle$, so ist, weil die drei Zweiecke offenbar die halbe Kugeloberfläche nebst dem doppelten Dreiecke enthalten:

$$a + b + c = O + 2\triangle \text{ und}$$

$$\triangle = \frac{a + b + c - O}{2}.$$ Nach §. 62. ist aber

$$a : O = A : 2R \text{ und } a = \frac{A}{2R} \times O.$$ Eben so

$b = \frac{B}{2R} \times O$ und $c = \frac{C}{2R} \times O$. Setzt man diese Werthe in die obige Gleichung von $\triangle$, so hat man:

$$\triangle = \left(\frac{A+B+C}{4R} - \frac{1}{2}\right) \times O = (A+B+C-2R) \times \frac{O}{4R}.$$

Mithin $\triangle : O = (A+B+C-2R) : 4R$.

Zusatz. Durch Zerlegung eines Kugelvielecks in Dreiecke erhält man unter Anwendung der Gleichung:

$$\triangle = (A+B+C-2R) \times \frac{O}{4R}$$

und indem man die Theile der Winkel addirt, für den Inhalt des Kugel-nEcks:

$$n\text{Eck} = [A+B+C+\ldots-(n-2) \times 2R] \times \frac{O}{4R} \text{ oder}$$

$$n\text{Eck} : O = (A+B+C+\ldots-(n-2) \times 2R) : 4R, \text{ d. h.}$$

die Fläche eines Kugelvielecks verhält sich zur Fläche der halben Kugel, wie der Ueberschuß der Summe seiner Winkel über so viel mal zwei rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwei, zu vier rechten.

§. 66.

XII. Lehrsatz. Dreht sich ein halbes reguläres 2nEck z. B. ADEFGHB (Fig. 162.) um den zwei Ecken verbindenden Durchmesser AB, so ist die erzeugte Umdrehungsfläche gleich dem Produkte aus der Peripherie des eingeschriebenen Kreises in den Durchmesser des umgeschriebenen.

Beweis. Man ziehe vom Mittelpunkte C auf eine Seite etwa DE die Senkrechte CN und auf AB die senkrechten Ordinaten DJ, NL, EK endlich DM senkrecht auf EK.

Der Kürze wegen bezeichne man den Halbmesser AC des umgeschriebenen Kreises mit R, den des eingeschriebenen CN mit r, die Seite DE des Vielecks mit s, JK = DM mit p und die Fläche des durch DE erzeugten Kegelmantels mit M.

Als Differenz zweier Kreisausschnitte, oder als Trapez berechnet, ist $M = (DJ + EK) \times s\pi = 2NL \times s\pi$, weil NL offenbar das arithmetische Mittel aus DJ und EK ist. Da aber $\triangle DEM \sim \triangle NLC$ (Pl. §. 51. Zus.), folglich $s : p = r : NL$ und $NL = \frac{rp}{s}$, so hat man, wenn man diesen Werth von NL in die obige Gleichung für M setzt:

$$M = 2 \times \frac{rp}{s} \times s\pi = 2rp\pi.$$

Für die durch Umdrehung der übrigen Seiten erzeugten ganzen oder abgekürzten Kegelmäntel erhält man in ähnlicher Weise $2rp'\pi$, $2rp''\pi$ u. s. w. wenn man ihre entsprechenden Abschnitte auf AB mit p', p'', p''' ... bezeichnet, mithin die ganze Umdrehungsfläche

$$U = 2r\pi\,(p + p' + p'' + p''' + \ldots) = 2r\pi \times 2R = 4rR\pi,$$

wie oben behauptet worden.

§. 67.

XIII. **Lehrsatz. Die Kugeloberfläche ist gleich vier größten Kreisflächen.**

Beweis. Ist ADB (Fig. 163.) der Halbkreis, der durch Bewegung um seinen Durchmesser $AB = 2r$ die Kugel erzeugt, deren Oberfläche wir mit O bezeichnen wollen, so ist O weder kleiner noch größer als $4r^2\pi = 2r\pi \times 2r$. Denn wäre etwa $O < 2r\pi \times 2r$, so daß also $2r\pi \times 2r$ der Oberfläche O' von einem größern Durchmesser etwa $EF = 2R$ gleich seyn müßte, so hätte man, wenn man um ADE ein halbes reguläres nEck construirte, dessen Seiten MN, NO .. PQ die Peripherie des größern Halbreises nicht berühren, für die Umdrehungsfläche des Vielecks

$U = 2r\pi \times MQ$ (nach dem vorigen Lehrsatze), folglich

$U : O' = 2r\pi \times MQ : 2r\pi \times 2r = MQ : 2r$, was unmöglich ist, da $U < O'$ und $MQ > 2r$. Eben so könnte man beweisen, daß O nicht größer als $2r\pi \times 2r$ seyn kann, folglich ist $O = 2r\pi \times 2r = 4r^2\pi$, wie behauptet worden.

1. Zusatz. Für zwei Kugeln, deren Halbmesser r und r' und deren Oberflächen O und O' hat man: $O : O' = 4r^2\pi : 4r'^2\pi = r^2 : r'^2$.

2. Zusatz. Denkt man sich um die Kugel einen von allen Seiten berührenden Cylinder, so ist seine Mantelfläche

$$M = 2r\pi \times 2r = 4r^2\pi,$$

daher ist dieselbe der Kugelfläche gleich.

3. Zusatz. Denkt man um einen Kreis ein Quadrat ABCD (Fig. 164.) und ein gleichseitiges Dreieck EFG construirt, und diese Figuren als Achsendurchschnitte dreier Umdrehungskörper, so ist, wenn der Halbmesser der Kugel mit r bezeichnet wird, die Oberfläche derselben gleich $4r^2\pi$, die des Cylinders sammt den Grundflächen gleich $6r^2\pi$, die des Kegels, weil die Seite $EF = 2r\sqrt{3}$ (Pl. §. 123. 2.),

$3r^2\pi + 2r\pi\sqrt{3} \times r\sqrt{3} = 9r^2\pi$, folglich verhalten sich die drei Oberflächen, wie 4 : 6 : 9, so daß die Cylinderoberfläche das geometrische Mittel zwischen der Kegel- und Kugelfläche ist.

4. Zusatz. Auf dieselbe Weise, wie im Lehrsatze geschehen, könnte man beweisen, daß eine Zone gleich ist dem Produkte ihrer Höhe in den Umfang des größten Kreises, also auch gleich einem gleich hohen Theil des um die Kugel beschriebenen Cylindermantels.

5. Zusatz. Zonen und Mützen von gleicher Höhe sind einander gleich, wenn sie zu einer und derselben oder zu gleichen Kugeln gehören.

§. 68.

XIV. **Lehrsatz. Dreht sich ein halbes reguläres 2n Eck z. B. ADEFGHB (Fig. 162.) um den zwei Ecken verbindenden Durchmesser AB, so ist der Inhalt des erzeugten Umdrehungskörpers gleich zwei Drittheilen des Produktes aus der Fläche des eingeschriebenen Kreises in den Durchmesser des umgeschriebenen.**

Beweis. Zieht man in der zu §. 66. gehörigen Figur noch die beiden Linien DC, EC, verlängert ED und BA, bis sie sich in O schneiden, und bezeichnet den durch Umdrehung des Dreiecks DCE erzeugten Körper durch $(DCE)^k$, so hat man, weil letzterer offenbar als die Differenz zweier durch OEC und ODC erzeugten Doppelkegel angesehen werden muß:

$$(CDE)^k = \frac{1}{3} EK^2\pi \times OC - \frac{1}{3} DJ^2\pi \times OC = \frac{1}{3} OC\pi \times$$
$$(EK^2 - DJ^2) = \frac{1}{3} OC\pi \times (EK + DJ) \times (EK - DJ) =$$
$$\frac{2}{3} OC\pi \times NL \times (EK - DJ) = \frac{2}{3} OC\pi \times NL \times EM \ldots (1).$$

Da nun wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ONC und DME

$$OC : NC = DE : EM \text{ oder } OC : r = s : EM, \text{ also } OC = \frac{rs}{EM},$$

so erhält man, wenn man diesen Werth von OC in die Gleichung (1) setzt:

$$(CDE)^k = \frac{2}{3} rs \times NL\pi \ldots (2).$$

Es ist aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DEM und NLC wieder:

$DE : DM = NC : NL$ oder $s : p = r : NL$, folglich $s = \frac{rp}{NL}$ und also, wenn man diesen Werth in die Gleichung (2) setzt:

$$(CDE)^k = \frac{2}{3} r^2\pi \times p.$$

Für die Inhalte der Umdrehungskörper der übrigen Dreiecke würde man denselben Ausdruck erhalten, nur mit dem Unterschiede, daß für p ein anderer von der Lage der Seite s abhängiger Faktor p', p'', p''' ... zu stehen käme. Da nun diese Abstände zusammen wieder den Durchmesser AB geben, so erhält man für den Umdrehungskörper des halben regelmäßigen Vielecks

$(ADEFGHB)^k = \frac{2}{3} r^2\pi \times AB = \frac{2}{3} r^2\pi \times 2R$, wie oben behauptet worden.

§. 69.

XV. Lehrsatz. **Der körperliche Inhalt einer Kugel ist einer Pyramide (oder einem Kegel) gleich, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Halbmesser der Kugel ist.**

Beweis. Da die Oberfläche der Kugel gleich ist $4r^2\pi$ und mithin der Kugelinhalt gleich $\frac{1}{3} \times 4r^2\pi \times r = \frac{2}{3} r^2\pi \times 2r$ seyn soll, so hat man wieder auf ähnliche Weise, wie in §. 67. Lehrs. XIII. zu zeigen, daß dieses Produkt nicht den Inhalt einer Kugel mit einem größern oder kleinern Halbmesser ausdrücken kann.

1. Zusatz. Denkt man sich in ein Quadrat ABCD (Fig. 165.) einen Kreis und ein gleichschenkliges Dreieck DCE construirt und diese Figuren als Achsendurchschnitte dreier Umdrehungskörper, so ist, wenn man den Halbmesser der Kugel mit r bezeichnet, der Inhalt des Kegels gleich $\frac{r^2\pi}{3} \times 2r = \frac{2r^3\pi}{3}$, der Inhalt der Kugel gleich $\frac{4r^3\pi}{3}$ der des Cylinders gleich $r^2\pi \times 2r = 2r^3 = \frac{6r^3}{3}$, so daß sich also Kegel, Kugel und Cylinder verhalten wie $2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3$, folglich der Kegel und die Kugel zusammengenommen dem Cylinder gleich sind.

2. Zusatz. Der körperliche Inhalt eines kegelförmigen Kugelausschnittes ist gleich einem Kegel, dessen Grundfläche die Kugelmütze und dessen Höhe der Halbmesser ist, folglich, wenn der

Halbmesser der Kugel mit R und die Höhe der Mütze mit h bezeichnet wird, $= \frac{1}{3} \times 2R\pi h \times R = \frac{2}{3} R^2 h\pi$.

3. Zusatz. Der Inhalt eines Kugelabschnitts ist als die Differenz eines Kugelausschnitts und eines Kegels zu berechnen. Ist nämlich der Halbmesser der Kugel $= R$, der Halbmesser der Grundfläche des Abschnittes $= r$, die Höhe des Abschnittes h, folglich die Höhe des Kegels $R - h$, so ist der Inhalt des Abschnitts

$$A = \frac{2}{3} R^2 h\pi - \frac{1}{3} r^2\pi \times (R - h) \ldots (1).$$

Da aber nach einem bekannten Satze $h : r = r : 2R - h$, also $r^2 = (2R - h)\, h$, so erhält man durch Substitution in (1)

$$A = \frac{2}{3} R^2 h\pi - \frac{1}{3} h\pi \times (2R - h)\,(R - h)$$

$$= \frac{2}{3} R^2 h\pi - \frac{1}{3} h\pi \times (2R^2 - 3Rh + h^2)$$

$$= \frac{2}{3} R^2 h\pi - \frac{2}{3} R^2 h\pi + Rh^2\pi - \frac{1}{3} h^3\pi$$

$$= h^2\pi \times (R - \frac{h}{3})$$

4. Zusatz. Will man aber den Abschnitt aus dem Halbmesser r der Grundfläche und der Höhe berechnen, so hat man aus der vorhergehenden Proportion:

$$2R - h = \frac{r^2}{h} \text{ und } R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$$ und folglich, wenn dieser Werth in die Gleichung des vorigen Zusatzes gesetzt wird:

$$A = h^2\pi \times (\frac{r^2}{2h} + \frac{h}{6}) = \frac{h}{2} \times r^2\pi + \frac{h^3\pi}{6},$$ d. h.

der Inhalt eines Abschnittes ist gleich einem Cylinder, welcher die Grundfläche des Abschnittes zur Grundfläche und die halbe Höhe desselben zur Höhe hat, nebst einer Kugel, welche die Höhe des Abschnittes zum Durchmesser hat.

§. 70.

XVI. Lehrsatz. **Der körperliche Inhalt eines Kugelrumpfes ist gleich einem Cylinder von der Höhe des Rumpfes und einer Grundfläche, welche dem arithmetischen Mittel aus den beiden parallelen Kreisebenen des Rumpfes gleich ist, nebst einer Kugel, welche die Höhe des Rumpfes zum Durchmesser hat.**

Beweis. Es sey BCAE (Fig. 166.) ein beliebiger Kreisausschnitt, kleiner als ein Quadrant, $BD = R$ und $EF = r$ senkrechte Ordinaten auf CA. Dreht sich die ganze Figur um CA als Achse, so beschreibt BDFEmnB einen Kugelrumpf, von der Höhe $DF = h$, welcher aus dem durch das Trapez BEFD erzeugten abgekürzten Kegel und einem ringförmigen Körper besteht, der durch die Umdrehung des Kreisabschnittes BEmn beschrieben wird. Den Inhalt des letztern erhält man auf folgende Weise:

Man ziehe die Sehne BE und verlängere sie, bis sie den gleichfalls verlängerten Halbmesser CA in K schneidet, ferner die Senkrechten CG und EH auf BE und BD, endlich die senkrechte Ordinate GJ und den Halbmesser CE.

Zieht man nun von dem durch Umdrehung des Kreisausschnittes BCA erzeugten Kugelausschnitt den des Ausschnittes ECA ab, so erhält man den Umdrehungskörper des Ausschnittes BCEmn, dessen Inhalt (nach §. 69. Zus. 2.)

$$S = \frac{2}{3} CA^2\pi \times DA - \frac{2}{3} CA^2\pi \times FA = \frac{2h\pi}{3} \times AC^2 \ldots (I)$$

Zieht man jetzt von dem Doppelkegel des Dreiecks BCK den des Dreiecks ECK ab, so erhält man den Umdrehungskörper des Dreiecks BCE, dessen Inhalt

$$S' = \frac{1}{3} R^2\pi \times CK - \frac{1}{3} r^2\pi \times CK = \frac{\pi}{3} \times CK \times (R^2 - r^2)$$

$$= \frac{\pi}{3} \times CK \times (R + r) \times (R - r)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \times CK \times GJ \times (R - r) \ldots\ldots (II.)$$

Nun folgt aus den ähnlichen Dreiecken GCK und BEH

$$CK : CG = BE : BH = BE : R - r.$$

Ferner aus den ähnlichen Dreiecken BHE und CGJ:

$GJ : CG = h : BE$, mithin aus diesen beiden Proportionen:

$$R - r = \frac{CG^2 \times h}{CK \times GJ} \ldots\ldots (III).$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (II), so hat man:

$$S' = \frac{2\pi}{3} \times CK \times GJ \times \frac{CG^2 \times h}{CK \times GJ} = \frac{2h\pi}{3} \times CG^2 \ldots (IV.)$$

Der durch Umdrehung des Kreisabschnittes BEmn erzeugte Körper hat also den Inhalt:

$$S - S' = \frac{2h\pi}{3} \times AC^2 - \frac{2h\pi}{3} \times CG^2 = \frac{2h\pi}{3} \times (AC^2 - CG^2)$$
$$= \frac{2h\pi}{3} \times (CB^2 - CG^2) = \frac{2h\pi}{3} \times \frac{BE^2}{4} = \frac{h\pi}{6} \times BE^2$$
$$= \frac{h\pi}{6} \times [h^2 + (R - r)^2] = \frac{h\pi}{6} \times [h^2 + R^2 + r^2 - 2Rr] \ldots (V.)$$

Addirt man hiezu den durch Umdrehung des Trapezes BEFD erzeugten abgekürzten Kegel, dessen Inhalt

$$K = \frac{h\pi}{3} \times [R^2 + r^2 + Rr] = \frac{h\pi}{6} \times [2R^2 + 2r^2 + 2Rr],$$

so erhält man für den Inhalt des Rumpfes

$$Z = \frac{h\pi}{6} [h^2 + R^2 + r^2 - 2Rr + 2R^2 + 2r^2 + 2Rr]$$
$$= \frac{h\pi}{6} \times [3R^2 + 3r^2 + h^2] = h\pi \left(\frac{R^2 + r^2}{2}\right) + \frac{h^3\pi}{6},$$

welcher Ausdruck mit unserer Behauptung übereinstimmt.

Zusatz. Setzt man $r = 0$, in welchem Falle der Rumpf in einen Abschnitt übergeht, so hat man

$$Z = \frac{h}{2} \times R^2\pi + \frac{h^3\pi}{6},$$

wie wir bereits oben gefunden haben.

Fünfter Abschnitt.

Sätze und Aufgaben zur Anwendung des Vorausgegangenen.

§. 71.

Einleitung.

Die für Körper dienende Maßeinheit ist ein Würfel (Cubus) von der Länge eines Fußes, Cubikfuß genannt. Das Messen der Körper geschieht, wie das der Flächen, gleichfalls nicht unmittelbar durch das Körpermaß, sondern wird durch das Längenmaß unter Anwendung der Rechnung ausgeführt. Hat z. B. ein rechteckiges Parallelepipedum drei zusammenstoßende Kanten von a, b und c Fußen, so ist, wie wir bereits oben §. 43. gesehen haben, sein Inhalt gleich

abc Cubikfußen, so daß es also blos nöthig ist, die Kanten unmittelbar zu messen.

Ein Cubikfuß hat $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$ oder $12^3 = 1728$ Cubikzoll und so ist es auch für die übrigen Unterabtheilungen des Körpermaßes. Zur Bezeichnung desselben gebraucht man den Beisatz c, z. B. 3c′ 130c″ (3 Cubikfuß 130 Cubikzoll).

Uebungsaufgaben.

1. Man verwandle 2co 23c′ 180c″ Dez. in Duodez.
2. Man verwandle 4c′ 13c″ 72c‴ Duodez. in Dez.

Anmerk. 1. Zur Bestimmung größerer körperlicher Figuren hat man die Kubikklafter, =Ruthe, =Meile, aber in vielen Fällen, namentlich wo ein unmittelbares Messen stattfinden kann, wie z. B. bei flüssigen Körpern, giebt man der Maßeinheit eine dem Zwecke entsprechende Größe und Form, als z. B. Maß, Eimer rc.

Die bayerische Maßkanne ist für Flüssigkeiten die Grundeinheit und enthält 43c″ Dez. bayr. Ihre Form ist beliebig, gewöhnlich cylinderförmig.

Der bayerische Visireimer hält 64 Maßkannen = 2752c″ Dez.; der bayerische Schenkeimer beträgt 60 Maßkannen = 2580c″ Dez.

Ein Ohm hat 2 Eimer; die Unterabtheilungen der Maß sind: Halbe (Seidel), Viertel (Quart) und Achtel=Maß. Im Rheinbayern folgt man dem französischen Maßsystem.

Die Einheit des bayerischen Getreidmaßes ist der Schäffel = 8c′ 944c″ Dez. Seine Unterabtheilungen sind: der Metzen = $\frac{1}{6}$ Schäffel = $34\frac{2}{3}$ bayr. Meßkannen = 1490. 666c″ Dez. Der Metzen hat 2 halbe Metzen, 4 Viertel, 8 Achtel, 16 Sechzehntel, 32 Dreißiger oder Mäßl, 64 halbe Dreißiger.

Ehemals hatte der Haberschäffel 7 Metzen.

Das Getreidmaß gilt auch als Mehlmaß rc.

Die Form des Schäffels ist ein abgekürzter Kegel, die des Metzens der Cylinder.

Für den Kalk gilt als Einheit die Muth = 4 Schäffel. Der Kalkmetzen soll nach gesetzlicher Bestimmung ein abgekürzter Kegel seyn, unten 1′ 6″, oben 1′ 3″ im Durchmesser und 11″ $11\frac{2}{5}$‴ hoch. Beim Messen muß aufgehäuft werden.

Für Brennholz ist die Einheit die Klafter, 6 Fuß im Quadrat, wobei die Scheiterlänge = $3\frac{1}{2}$′, sohin der Inhalt 126c′.

Anmerk. 2. Die Grundeinheit für Körper ist nach dem französischen Maßsystem der Cubikmeter (Mètre cube), allein da dieses Maß in vielen Fällen unbequem ist wegen seiner Größe, so hat man Theile desselben als spezielle Grundeinheiten angenommen, nämlich:

a) für Flüssigkeiten den Litre = 1 decimètre cube, den man nach dem Dezimalsystem eintheilt;

b) für feste Körper den Stère = 1 Mètre cube, ebenfalls mit Unterabtheilungen nach dem Dezimalsystem.

Anmerk. 3. Von den vielen Werken, die das Münz-, Maß- und Gewichtswesen zum Gegenstande haben, führen wir nur einige an:

1. Georg Freiherr von Vega's natürliches Maß-, Gewichts- und Münzsystem. Wien 1803.

2. J. C. Nelkenbrecher's allgemeines Taschenbuch der Münz-, Maß- und Gewichtskunde. 16. Aufl. Berlin 1842.

3. J. Salomon's Metrologische Tafeln. Wien 1823.

Die gesetzlichen Bestimmungen über das neue bayerische Maß wurden durch das Regierungsblatt bekannt gemacht.

I. Kapitel.

Berechnung des Inhaltes der Polyeder.

§. 72.

Bezeichnet man die Seite eines Würfels mit s, seinen Inhalt mit C, so ist $C = s^3$ und $s = \sqrt[3]{C}$.

Uebungsaufgaben.

1. Wie groß ist die Diagonale D eines Würfels, dessen Seite (Kante) s ist?

Beispiele: $s = 5' \, 2''$ $D = x$ und $D = 8' \, 4''$ $s = y$.

2. Wie groß ist die Oberfläche O eines Würfels, dessen Seite s ist? (Beispiele.)

3. Wie groß ist der Inhalt C eines Würfels, dessen Diagonale D oder dessen Oberfläche O ist? (Beispiele.)

4. Wie groß muß die Seite S eines Würfels seyn, der zweimal so groß ist, als ein anderer von der Seite s? (Delisches Problem.)

§. 73.

Bezeichnet man den Inhalt, die Oberfläche und die drei Kanten eines rechteckigen Parallelepipedums mit Ppd, O, a, b, c, so hat man:

1) $Ppd = abc$, folglich $a = \frac{Ppd}{bc}$ u. s. w.

2) $O = 2(ab + ac + bc)$. (Beispiele.)

Uebungsaufgaben.

1. Wie groß ist jede der gleichen Diagonalen D eines rechteckigen Parallepipedums, dessen Kanten a, b, c sind?

2. Wie viele Klafter Holz enthält ein rechteckig zugehauener Balken, dessen drei Dimensionen 41′, 2′ 3″ und 3′ 4″ Duodez. bayr. sind?

3. Eine Mauer soll 100′ lang, 12′ hoch und 1 ½′ dick werden, wie viele Steine à 1′ lang, 6″ breit und 1 ½″ dick sind dazu erforderlich, wenn das Mörtelband zu ½″ angenommen wird?

4. Das Netz (die ausgebreitete Oberfläche) eines rechteckigen Parallelepipedums (also auch eines Würfels) zu zeichnen, wenn die Kanten gegeben sind.

5. Das Netz eines schiefen Parallelepipedums zu zeichnen, wenn nebst den drei Kanten auch die Winkel gegeben sind, welche von je zwei Kanten gebildet werden.

6. Wie groß ist die Oberfläche O und der Inhalt P eines senkrechten Prisma von der Höhe h, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Dreieck von der Seitenlänge s ist?

7. Ein regelmäßiges Prisma mit sechsseitiger Grundfläche von der Seitenlänge s hat den Inhalt P, wie groß ist die Höhe h desselben?

8. Wie groß ist der Inhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Seitenkante der Grundkante s gleich ist?

9. Wie groß ist die Höhe einer Pyramide, deren Inhalt P und deren Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten a, b, c ist?

10. Das Dach eines vierseitigen Thurms hat eine Höhe von 30′ die Breite der Mauern ist 18′, wie viel Blech braucht man zur Eindeckung?

11. Das Netz einer regelmäßigen Pyramide zu zeichnen, wenn Grundfläche und Höhe gegeben sind.

12. Das Netz einer beliebigen Pyramide zu zeichnen, wenn die Grundfläche, die Höhe und die Lage ihres Fußpunktes gegeben sind.

13. Das Dach eines Gebäudes hat am Firste 67′, an den beiden Dachtraufen 71′ 5″ und 61′ 7″. Die Hausbreite beträgt 40′ und senkrechte Höhe 25′ 8″, wie groß ist der ganze Raum unter dem Dach.

14. Bei einer auf geneigtem Terrain ausgegrabenen Grube ist die horizontale Grundfläche ein Rechteck, dessen beide Dimensionen 40′ 4″ und 17′ 8″ und deren senkrechte Seitenkanten 22′ 4″, 31′ 8″, 39′ 2″ und 29′ 8″ sind, wie groß ist der Inhalt der ausgegrabenen Erde?

15. Eine Formel zu finden für den Inhalt eines Obelisken ACF (Fig. 167.) und eines Dammes ACF (Fig. 168.), wenn die rechteckigen Grundflächen von den Seiten $AB = a$, $BG = b$, $CD = a'$ und $DE = b'$ begrenzt werden und um die Höhe $KL = h$ von einander abstehen. (Beispiele.)

Anmerk. Beim Obelisken laufen die Seitenkanten nicht wie bei der abgekürzten Pyramide in einen Punkt zusammen, sondern es schneiden sich nur je zwei so, daß die Verbindungslinie der Schnittpunkte mit der Grundfläche parallel wird.

§. 74.

I. **Aufgabe. Den Inhalt einer parallel zur Grundfläche abgekürzten Pyramide durch Rechnung zu finden.**

Auflösung. Denkt man sich den Körper ABCDEF (Fig. 169.) zu einer vollständigen Pyramide ergänzt und von der Spitze G auf die Grundfläche (oder deren Erweiterung) eine Senkrechte GH gezogen, welche die parallele Schnittfläche DEF in J durchschneidet, so hat man, wenn man die ganze Pyramide mit Pyr, den oberen Theil mit pyr, die beiden parallelen Grundflächen mit G und g, JH mit h und GJ mit x bezeichnet:

$$Pyr = \frac{G}{3}(h + x),\ pyr = \frac{g}{3} \times x, \text{ folglich}$$

$$ABCDEF = Pyr - pyr = \frac{G}{3}(h + x) - \frac{g}{3} \times x$$

$$= \frac{G}{3} \times h + \frac{G - g}{3} \times x \ldots (A).$$

Es ist aber $x^2 : (x + h)^2 = GD^2 : GA^2 = DE^2 : AB^2 = g : G$

mithin $x : x + h = \sqrt{g} : \sqrt{G}$,

daher $x + h - x : x = (\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g}$

oder $h : x = (\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g}$

und $x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$. Diesen Werth in (A) gesetzt:

$$ABCDEF = \frac{Gh}{3} + \frac{G - g}{3} \times \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \frac{Gh}{3} + \frac{(\sqrt{G} + \sqrt{g})h\sqrt{g}}{3}$$

$$= \frac{Gh}{3} + \frac{\sqrt{(Gg)} \times h}{3} + \frac{gh}{3}$$

$$= \frac{h}{3}(G + \sqrt{(Gg)} + g),$$

welches Resultat mit dem in §. 39. Lehrs. XI. gefundenen übereinstimmt.

Zusatz. Der Beweis ändert sich nicht, wenn die Pyramide mehr als dreiseitig ist.

Anmerk. In der praktischen Anwendung, wo eine annähernde Genauigkeit ausreicht, betrachtet man die abgekürzte Pyramide als ein Prisma von derselben Höhe und der mittleren Grundfläche (nämlich der durch den Halbirungspunkt der Höhe gelegten). Dieser letztere Inhalt ist stets etwas kleiner, als der genaue Werth und liegt demselben um so näher, je kleiner der Unterschied zwischen zwei entsprechenden Seiten der beiden Grundflächen ist.

Würde man statt der mittleren Grundfläche das arithmetische Mittel aus beiden Grundflächen nehmen, so würde man den Inhalt stets etwas größer erhalten, als der genaue Werth ist, doch ist in diesem Falle der Fehler größer als im ersteren.

Es seyen z. B. die Grundlinien der Grundflächen $g = 6$, $g' = 4$ die Höhen $h = 3$, $h' = 2$, so ist $\frac{1}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$ $= \frac{1}{3} \times (9 + \sqrt{36} + 4) = 6\frac{1}{3}$. Die mittlere Grundfläche aber $\frac{1}{2} \times (g + g' \times h + h') = \frac{1}{2} \times (5 \times \frac{5}{2}) = 6\frac{1}{4}$ und das Mittel aus den Grundflächen $\frac{G+g}{2} = \frac{G+4}{2} = 6\frac{1}{2}$.

Es ist aber $6\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4} < 6\frac{1}{2} - 6\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{12} < \frac{1}{6}$.

§. 75.

II. **Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines physischen Körpers mittels des Gewichts zu bestimmen.**

Auflösung. Um den Inhalt eines beliebigen Polyeders geometrisch zu bestimmen, müßte man dasselbe so in Pyramiden zerlegt denken, daß die Seiten des Körpers die Grundflächen der Pyramiden bildeten und sämmtliche Spitzen in einen Punkt im Innern des Polyeders zu liegen kämen. Da aber bei einem physischen Körper die Höhen dieser Pyramiden nicht gemessen werden könnten, so läßt sich der Inhalt auf diese Weise nicht finden, man wählt hier folgende Methode:

Ein bayerischer Kubikfuß Wasser wiegt 44 ℔ 12 Lth. = 44,375 ℔. Man erhält daher den Cubikinhalt einer Wassermenge, wenn man ihr Gewicht durch 44,375 theilt. Ist aber ein Körper smal schwerer als Wasser, so ist sein Cubikinhalt smal kleiner als der eines Wasserquantums von gleichem Gewichte, mithin erhält man den Inhalt J

des Körpers, wenn man sein (absolutes) Gewicht a durch $44{,}375 \times s$ theilt oder

$$J = \frac{a}{44{,}375 \times s}, \text{ folglich auch } a = 44{,}375 \times s\, J, \text{ und}$$

$$s = \frac{a}{44{,}375 \times J}.$$

In diesem Sinne ist s das spezifische Gewicht des Körpers.

1. Beispiel. Ein Stück Kupfer wiegt 125 ℔, wie groß ist sein Inhalt, wenn das spezifische Gewicht des Kupfers 8,88 ist?

$$J = \frac{125}{44{,}375 \times 8{,}88} = 0{,}317218^{c'} = 317^{c''}\ 218^{c'''}.$$

2. Beispiel. Ein Stück geschmiedetes Eisen in der Form eines rechteckigen Parallelepipedums ist 12' lang, 2½'' breit, ¾'' dick, wie viel Pfund wiegt dasselbe, wenn das spezifische Gewicht des Eisens 7,6 ist?

$$a = 44{,}375 \times 7{,}6 \times 12 \times 0{,}25 \times 0{,}075 = 44{,}375 \times 7{,}6 \times 0{,}225$$
$$= 75{,}88125 \text{ ℔}.$$

3. Beispiel. Ein Würfel, dessen Seitenlänge 1''dd ist, wiegt $\frac{31}{48}$ Loth, was ist sein spezifisches Gewicht?

$$s = \frac{\frac{31}{48 \times 32}}{44{,}375 \times \frac{1}{1728}} = \frac{31 \times 1728}{44{,}375 \times 48 \times 32} = 0{,}77.$$

Wir fügen zur Anwendung folgende aus Weisbach's Ingenieur entnommene Tabelle der spezifischen Gewichte mehrerer fester Körper bei:

Ahornholz	0,65	bis	0,69
Alabaster	2,70		
Alaun	1,7	„	1,8
Alaunschiefer	2,34	„	2,59
Apfelbaumholz	0,67	„	0,79
Basalt	2,72	„	2,86
Bernstein	1,06	„	1,09
Bimsstein	0,91	„	1,65
Birkenholz	0,60	„	0,80
Birnbaumholz	0,65	„	0,73
Blei	11,33	„	11,45
Braunkohle	1,22	„	1,29

Stadtbibliothek Augsburg

Buchenholz	0,63	bis	0,85
Caoutschuk	0,925	„	0,934
Ebenholz	0,80	„	1,33
Eichenholz	0,62	„	0,85
Eisen, geschmiedet	7,6	„	7,79
„ gegossen	7,0	„	7,5
„ in Drath	7,6	„	7,75
Elfenbein	1,80	„	1,92
Erlenholz	0,42	„	0,68
Feuerstein	2,58	„	2,59
Fichtenholz	0,38	„	0,79
Franzosenholz (Guajak)	1,33		
Glas, Bouteillen-	2,73		
„ Krystall-	2,89		
„ Flint-	3,20	„	3,78
Glockenmetall	8,81		
Gneiß	2,39	„	2,71
Gold, gediegen	14,6	„	19,1
„ gegossen	19,25		
„ gehämmert	19,5		
Granit	2,50	„	3,05
Holzkohle, von Nadelholz	0,28	„	0,44
„ von Eichenholz	0,573		
Kalk, gebrannt	2,3	„	3,18
Kalkstein	2,46	„	2,84
Kiefernholz	0,463	„	0,910
Kieselsteine	2,3	„	2,7
Kirschbaumholz	0,577	„	0,715
Korkholz	0,240	„	
Kreide, weiße	1,8	„	2,66
Kupfer, gegossen	8,59	„	8,90
„ gehämmert	8,88	„	9,00
„ in Draht	8,78	„	8,95
Lerchenholz	0,573	„	0,565
Lindenholz	0,559	„	0,604
Mahagonyholz	0,563	„	1,063
Marmor	2,52	„	2,85
Messing, gegossen	8,40	„	8,71
„ in Blechen	8,52	„	8,62
„ in Draht	8,34	„	8,73

Mühlsteinquarz	1,24	bis	2,61
Platin	20,9	„	21,5
Porphyr	2,4	„	2,8
Porzellan	2,38	„	2,49
Quarz (siehe Kieselsteine).			
Sandstein	1,90	„	2,70
Silber, gegossen	10,10	„	10,47
„ gehämmert	10,51	„	10,62
Stahl, Cementstahl	7,26	„	7,80
„ gefrischt	7,50	„	7,81
„ Gußstahl	7,83	„	7,92
Steinkohlen	1,21	„	1,51
Tannenholz	0,49	„	0,75
Thon	1,80	„	2,63
Thonschiefer	2,76	„	2,88
Wachs	0,97		
Ziegelstein, gemeiner	1,40	„	2,20
Zink, gegossen	6,86	„	7,22
„ gewalzt	7,19	„	7,86
Zinn	7,29	„	7,47

Anmerk. Das absolute Gewicht der Körper muß bei Bestimmung des Inhaltes oder des spezifischen Gewichtes mittels einer genauen Wage gesucht werden. Die spezifischen Gewichte der Holzarten sind verschieden nach dem Grade der Trockenheit, des Alters, Standortes u. s. w., weßwegen man in gegebenen Fällen nicht immer die Zahlen aus der Tabelle entnehmen darf, sondern sie selbst bestimmen muß, wie die Physik lehrt.

Uebungsaufgaben.

1. Es soll ein Würfel von Eisen gegossen werden, der gerade ein Pfund wiegt, wie groß muß die Seite seyn?

2. Eine Kupferplatte, welche $2\frac{1}{2}'$ lang, $1{,}3'$ breit ist, wiegt 1 ℔ 3 Loth, wie dick ist sie?

3. Das Gold hat eine solche Dehnbarkeit, daß man mit einer Dukate eine Fläche von 36□' vergolden kann. Wie dick ist eine solche Goldschichte, wenn 67 Dukaten auf eine Münzmark = 233,855 franz. Grammes gehen, und 1 bayr. Pfund = 560 Grammes hat?

4. Wie tief sinkt ein Würfel von Erlenholz, dessen Kante 1′ 2″ lang ist, im Wasser ein?

5. Wie groß ist die Kante eines Tetraeders aus Blei, der einen Zentner wiegt?

§. 56.

III. Aufgabe. Eine allgemeine Formel für die Berechnung des Cubikinhaltes J der regelmäßigen Polyeder zu finden.

Auflösung. Da sich jedes regelmäßige Polyeder in so viele congruente Pyramiden zerlegen läßt, als es Seiten hat, die den Halbmesser der eingeschriebenen Kugel zur Höhe haben, so ist, wenn man den Inhalt einer Seite mit s, die Anzahl der Seiten mit n und den Halbmesser der eingeschriebenen Kugel mit r bezeichnet:

$$J = \frac{r}{3} \times ns \ldots\ldots (A).$$

Da wir nun s aus früheren Aufgaben kennen, nämlich der Inhalt des regelmäßigen

$$\left.\begin{array}{ll} 3\text{ Ecks} = \frac{k^2}{4}\sqrt{3} \ldots\ldots & (B) \\ 4 \quad " \quad = k^2 \ldots\ldots\ldots & (C) \\ 5 \quad " \quad = \frac{5k^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} & (D) \end{array}\right\} \text{indem man ihre Seite mit k bezeichnet,}$$

so wird es blos darauf ankommen, auch noch r durch k auszudrücken. Zu diesem Zwecke stellen wir, ehe wir zu den einzelnen Polyedern übergehen, folgende allgemeine Betrachtungen an:

Es sey A (Fig. 170.) ein Eck eines regelmäßigen Polyeders, AB, AC, AD, AE, AF seyen die von A auslaufenden Kanten des Ecks, so wird, wenn man die Endpunkte B, C, D, E, F der Kanten verbindet, die regelmäßige Figur BCDEF (Basis des Ecks A) entstehen, weil ihre Eckpunkte nicht allein von A, sondern auch vom Mittelpunkte O des Polyeders gleichweit entfernt sind, und der Durchmesser AOH der umgeschriebenen Kugel wird durch den Mittelpunkt G der Basis BCDEF gehen. Legt man nun durch AH und einen Punkt B der Basis eine Ebene, so wird dieselbe die Kugel in einer größten Kreisebene schneiden. Zieht man nun vom Mittelpunkte O eine Senkrechte auf eine Seite ADE des Polyeders, so wird diese durch den Mittelpunkt J derselben gehen und OJ der Halbmesser der eingeschriebenen Kugel seyn. JE ist der Halbmesser des um ADE beschriebenen Kreises. Bezeichnet man nun

die Kante des Polyeders mit . . . . K,
den Halbmesser OA der umgeschriebenen Kugel mit . R,
" " OJ " eingeschriebenen " " . r,
" " BG " Basis BCDEF mit . . . P,
" " JE " Seite ADE " . . . ϱ,

die Entfernung AG des Ecks A von seiner Basis mit . h,
so hat man folgende Relationen:

1) $AB^2 = AG^2 + GB^2$ oder $K^2 = h^2 + P^2$ . . . (B)

2) $AG : AB : AH$ od. $h : k : 2R$ od. $K^2 = 2hR$ . . . . . (C)

3) $OE^2 = OJ^2 + JE^2$ oder $R^2 = r^2 + \varrho^2$ . . (D)

aus welchen man r auf folgende Weise erhält:

aus (D) ist $r = \sqrt{(R^2 - \varrho^2}$. Den Werth $R = \frac{K^2}{2h}$,

aus (C) substituirt $r = \sqrt{(\frac{K^4}{4h^2} - \varrho^2)}$. Den Werth $h^2 = K^2 - P^2$,

aus (B) substituirt $r = \sqrt{(\frac{K^4}{4(K^2 - P^2)} - \varrho^2)}$ . . . (E).

Diesen Werth aus (E) in der Gleichung (A) substituirt, ist

$$J = \frac{1}{3}\sqrt{(\frac{K^4}{4(K^2 - P^2)} - \varrho^2)} \times ns \ . \ . \ . \ (F).$$

Aus dieser allgemeinen Formel bestimmen wir nun den Inhalt der einzelnen regelmäßigen Polyeder auf folgende Weise.

§. 77.

IV. **Aufgabe. Den Inhalt eines regelmäßigen Tetraeders zu bestimmen.**

Auflösung. Da beim Tetraeder die Basis des Ecks A zugleich eine Seite des Körpers ist mit der Kante K, so ist

$$P = \frac{K}{3}\sqrt{3} \ . \ . \ . \ (a) \text{ (Pl. §. 123. 1.). Deßgleichen}$$

$$\varrho = \frac{K}{3}\sqrt{3} \ . \ . \ . \ (b)$$

$$n = 4$$

$$s = \frac{K^2}{4}\sqrt{3} \text{ (Pl. §. 123. Zus. 1.). Mithin}$$

$$J = \frac{1}{3}\sqrt{[\frac{K^4}{4(K^2 - \frac{K^2}{3})} - \frac{K^2}{3}]} \times 4 \times \frac{K^2}{4}\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\frac{3}{8}K^2 - \frac{1}{3}K^2)} \times K^2\sqrt{3}$$

$$= \frac{K^3}{3}\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{K^3}{12}\sqrt{2} = 0{,}1178511 \times K^3 \ . \ . \ (c).$$

1. Zusatz. Um R statt K zu substituiren, oder den Inhalt des Tetraeders durch den Halbmesser der umgeschriebenen Kugel auszudrücken, wird man aus den Gleichungen (B) (C) (a) erhalten:

$$K = \frac{2}{3} R\sqrt{6} \ldots (d)$$

folglich $K^3 = \frac{16}{9} R^3 \sqrt{6}$, mithin

$$J = \frac{\sqrt{2}}{12} \times \frac{16}{9} R^3 \sqrt{6} = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3} = 0{,}5132002\, R^3 \ldots (e).$$

2. Zusatz. Um r statt K zu erhalten, findet man aus (D) (b) und (d) $K = 2r\sqrt{6} \ldots (f)$,

mithin $K^3 = 48\, r^3 \sqrt{6}$, mithin

$$J = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 48 r^3 \sqrt{6} = 8 r^3 \sqrt{3} = 0{,}0190074 \times r^3 \ldots (g).$$

3. Zusatz. Für die Oberfläche O des Tetraeders hat man:

$O = 4 \times s = 4 \times \frac{K^2}{4} \sqrt{3} = K^2 \sqrt{3}$. Wenn man statt K^2 aus (d) $\frac{8}{3} R^2$ setzt $O = \frac{8}{3} R^2 \sqrt{3}$. Setzt man statt K^2 aus (f) $24 r^2$, so ist: $O = 24 r^2 \sqrt{3}$.

§. 78.

V. **Aufgabe. Den Inhalt eines regelmäßigen Hexaeders zu bestimmen.**

Auflösung. Beim Hexaeder ist die Basis des Ecks A ein regelmäßiges Dreieck, dessen Seite als Diagonale der Seitenfläche des Hexaeders $= K\sqrt{2}$ ist, folglich hat man hier:

$$P = \frac{K\sqrt{2}}{3} \sqrt{3} = \frac{K}{3} \sqrt{6} \ldots (h) \text{ (Pl. §. 123. 1.)},$$

$$\varrho = \frac{K}{2} \sqrt{2} \ldots (i) \text{ (Pl. §. 122. 1.)},$$

$$n = 6$$

$$s = K^2 \text{ (Pl. §. 122. Zusatz), mithin:}$$

$$J = \frac{1}{3} \sqrt{\left[\frac{K^4}{4(K^2 - \frac{2}{3} K^2)} - \frac{K^2}{2} \right]} \times 6 \times K^2$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{3}{4} K^2 - \frac{1}{2} K^2\right)} \times 6 K^2$$

$$= \frac{1}{6} K \times 6 K^2 = K^3 \ldots (k).$$

Ein Resultat, welches wir schon aus früheren Sätzen kennen, und dadurch für unsere gegenwärtige Rechnung eine Probe haben.

1. Zusatz. Um R statt K zu substituiren oder den Inhalt des Heraeders aus dem Halbmesser der umgeschriebenen Kugel zu bestimmen, hat man aus (B) (C) und (h)

$$K = \frac{2}{3} R \sqrt{3} \; \ldots . (l), \text{ mithin}$$

$$J = K^3 = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3} = 1{,}5396007 \, R^3 \; \ldots . (m).$$

2. Zusatz. Um r statt K zu erhalten, hat man aus (D) (i) und (l)

$$K = 2r \; \ldots .. (n), \text{ mithin}$$

$$J = K^3 = 8 r^3 \; \ldots . (o).$$

3. Zusatz. Für die Oberfläche O des Heraeders hat man:

$O = 6 \times s = 6K^2$. Wenn man statt K^2 aus (l) $\frac{4}{3} R^2$ setzt:

$O = 8 R^2$. Setzt man statt K^2 aus (n) $4 r^2$, so ist

$O = 24 r^2$.

§. 79.

VI. Aufgabe. Den Inhalt eines regelmäßigen Octaeders zu bestimmen.

Auflösung. Beim Octaeder ist die Basis des Ecks A ein regelmäßiges Viereck, dessen Seite die Kante des Polyeders = K, folglich hat man:

$$P = \frac{K}{2} \sqrt{2} \; \ldots \ldots (p) \; (\text{Pl. §. 122. 1.})$$

$$\varrho = \frac{K}{3} \sqrt{3} \; \ldots \ldots (q) \; (\text{Pl. §. 123. 1.})$$

$$n = 8$$

$$s = \frac{K^2}{4} \sqrt{3} \quad (\text{Pl. §. 123. Zus. 1.}), \text{ mithin}$$

$$J = \frac{1}{3} \sqrt{\left[\frac{K^4}{4\left(K^2 - \frac{K^2}{2}\right)} - \frac{K^2}{3} \right]} \times 8 \times \frac{K^2}{4} \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1}{2} K^2 - \frac{1}{3} K^2\right)} \times 2K^2 \sqrt{3}$$

$$= \frac{K}{3} \sqrt{\frac{1}{6}} \times 2K^2 \sqrt{3} = \frac{2}{3} K^3 \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{K^3}{3} \sqrt{2} \; \ldots . (r)$$

$$= 0{,}4714045 \, K^3.$$

1. Zusatz. Um R statt K zu substituiren hat man aus (B) (C) (p)

$$K = R\sqrt{2} \ldots\ldots (s), \text{ mithin}$$

$$J = \frac{K^3}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}R^3 = 1{,}3333333 \times R^3 \ldots . (t).$$

2. Zusatz. Um r statt K zu erhalten, hat man aus (D) (q) (s)

$$K = r\sqrt{6} \ldots\ldots (u), \text{ mithin}$$

$$J = \frac{K^3}{3}\sqrt{2} = 4r^3\sqrt{3} = 6{,}9282032 \times r^3 \ldots . (v).$$

3. Zusatz. Für die Oberfläche des Octaeders hat man:

$$O = 8 \times s = 8 \times \frac{K^2}{4}\sqrt{3} = 2K^2\sqrt{3}.$$ Wenn man statt K^2 aus (s) $2R^2$ setzt: $O = 4R^2\sqrt{3}$. Setzt man statt K^2 aus (u) $6r^2$, so ist: $O = 12r^2\sqrt{3}$.

§. 80.

VII. **Aufgabe. Den Inhalt eines regelmäßigen Dodekaeders zu bestimmen.**

Auflösung. Beim Dodekaeder ist die Basis des Ecks A ein regelmäßiges Dreieck, dessen Seite als Diagonale der Seitenfläche (nämlich eines Fünfecks von der Kante des Polyeders) (Pl. §.129. Zus.) $= K\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{K}{2}(\sqrt{5}+1)$ *), folglich hat man hier:

$$P = \frac{\frac{K}{2}(\sqrt{5}+1)}{3} \times \sqrt{3} = \frac{K}{6}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) \text{ (w) (Pl. §. 123. 1.)}$$

$$\varrho = K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \ldots\ldots (x) \quad \text{(Pl. §. 124. Zus. 1.)}$$

$$n = 12$$

$$s = \frac{5K^2}{4} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{5K^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

(Pl. §. 124. Zus. 3.)

$$\text{Mithin } J = \frac{1}{3}\sqrt{\left[\frac{K^4}{4\left(K^2 - \frac{K^2}{36}(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2\right)} - K^2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\right]} \times 12 \times \frac{5K^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},$$

oder, indem wir die Reduktion dem Schüler überlassen:

$$J = \frac{K^3}{4}(7\sqrt{5}+15) = 7{,}6631189 \ldots . (y).$$

---

*) Nach einem arithmetischen Satze:

$$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$$

1. Zusatz. Um R statt K zu substituiren, hat man aus (B) (C) (w)

$$K = \frac{R}{3}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \ldots\ldots (z), \text{ oder}$$

$$K^3 = \frac{R^3}{27}(15\sqrt{15} - 45\sqrt{3} + 9\sqrt{15} - 3\sqrt{3}) = R^3 \times \left(\frac{8\sqrt{15} - 16\sqrt{3}}{9}\right)$$

Mithin $J = \frac{R^3}{4} \times \frac{8\sqrt{15} - 16\sqrt{3}}{9} \times (7\sqrt{5} + 15)$

$$= \frac{R^3}{9}(10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}) = 2{,}7851638 \times R^3 \ldots (a')$$

2. Zusatz. Um r statt K zu erhalten, hat man aus (D) (x) (z)

$$K = r\sqrt{(50 - 22\sqrt{5})} \ldots\ldots (b'), \text{ oder}$$

$$K^3 = (50 - 22\sqrt{5})r^3 \times \sqrt{(50 - 22\sqrt{5})}, \text{ mithin}$$

$$J = \frac{r^3}{4}(7\sqrt{5} + 15) \times (50 - 22\sqrt{5}) \times \sqrt{(50 - 22\sqrt{5})}$$

$$= 10r^3\sqrt{(130 - 58\sqrt{5})} = 5{,}5502800 \times r^3 \ldots (c').$$

3. Zusatz. Für die Oberfläche des Dodekaeders hat man:

$$O = 12 \times s = 12 \times \frac{5K^2}{4}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = 15K^2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Wenn man statt K^2 aus (z) $\frac{6 - 2\sqrt{5}}{3}R^2$ setzt:

$$O = 5(6 - 2\sqrt{5})R^2\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = 10R^2\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Setzt man statt K^2 aus (b') $r^2(50 - 22\sqrt{5})$, so ist:

$$O = 15r^2(50 - 22\sqrt{5}) \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = 30r^2\sqrt{(130 - 58\sqrt{5})}.$$

§. 81.

VIII. Aufgabe. Den Inhalt eines regelmäßigen Ikosaeders zu bestimmen.

Auflösung. Beim Ikosaeder ist die Basis des Ecks A ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Seite die Kante des Polyeders = K ist, folglich hat man hier:

$$P = K\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ldots\ldots (d') \text{ (Pl. §. 124. Zus. 1.)}$$

$$\varrho = \frac{K}{3}\sqrt{3} \ldots\ldots (e') \text{ (Pl. §. 123. Zus. 1.)}$$

$$n = 20$$

$$s = \frac{K^2}{4}\sqrt{3} \quad \text{(Pl. §. 123. Zus. 1.)}$$

Mithin $J = \frac{1}{3}\sqrt{\left[\frac{K^4}{4\left(K^2 - K^2\frac{(5+\sqrt{5})}{10}\right)} - K^2\right]} \times 20 \times \frac{K^2}{4}\sqrt{3}$,

woraus nach gehöriger Reduktion:

$$J = \frac{5K^2}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \frac{5K^2}{6}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5K^3}{12}(3+\sqrt{5})$$
$$= 2{,}1816950 \times K^3 \;.\;.\;.\;.\;.\; (f').$$

1. Zusatz. Um R statt K zu substituiren, hat man aus (B) (C) (d')

$$K = R\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (g'), \text{ oder}$$

$$K^3 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5} R^3\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}. \text{ Mithin}$$

$$J = \frac{5}{12} \times (3+\sqrt{5}) \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5} R^3 \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$
$$= (3+\sqrt{5}) \times (5-\sqrt{5}) \times \frac{R^3}{6}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$
$$= (5+\sqrt{5}) \times \frac{R^3}{3}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{R^3}{3}\sqrt{(200+40\sqrt{5})}$$
$$= \frac{2}{3}R^3\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = 2{,}5361506 \times R^3 \;.\;.\;.\;.\; (h').$$

2. Zusatz. Um r statt K zu erhalten, hat man aus (D) (e') (g')
$K = r\sqrt{(42-18\sqrt{5})} = (3\sqrt{3} - \sqrt{15}) \times r \;.\;.\;.\;.\; (i')$, oder
$K^3 = r^3(216\sqrt{3} - 96\sqrt{15}) = 24(9\sqrt{3} - 4\sqrt{15})r^3$. Mithin

$$J = \frac{5r^3}{12} \times 24(9\sqrt{3} - 4\sqrt{15}) \times (3+\sqrt{5})$$
$$= 10r^3 \times (7\sqrt{3} - 3\sqrt{15}) = 5{,}0540650\, r^3 \;.\;.\;.\; (k').$$

3. Zusatz. Für die Oberfläche des Ikosaeders hat man:

$$O = 20 \times s = 20 \times \frac{K^2}{4}\sqrt{3} = 5K^2\sqrt{3}.$$

Wenn man statt K^2 aus (g') $\frac{10-2\sqrt{5}}{5}R$ setzt:

$$O = (10-2\sqrt{5})R^2\sqrt{3} = (10\sqrt{3} - 2\sqrt{15})R^2.$$

Setzt man statt K^2 aus (i') $(42-18\sqrt{5})r$, so ist:

$$O = 5(42-18\sqrt{5})r^2\sqrt{3} = (210\sqrt{3} - 90\sqrt{15})r^2.$$

4. Zusatz. Wollte man aus der Kante K eines regelmäßigen Polyeders die Halbmesser R und r der um- und eingeschriebenen Kugel finden, so dürfte man nur die für K und R, K und r stattfindenden Gleichungen (d) (f) (l) (n) (s) (u) (z) (b') (g') (i') nach R

und r auflösen. Wir überlassen diese Uebung dem Schüler und geben nur die Resultate:

a) Beim Tetraeder:

$$R = \frac{K}{4}\sqrt{6} \qquad r = \frac{K}{12}\sqrt{6}.$$

b) Beim Octaeder:

$$R = \frac{K}{2}\sqrt{3} \qquad r = \frac{K}{6}\sqrt{6}.$$

c) Beim Ikosaeder:

$$R = \frac{K}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} \quad r = \frac{K}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}).$$

d) Beim Hexaeder:

$$R = \frac{K}{2}\sqrt{3} \qquad r = \frac{K}{2}.$$

e) Beim Dodekaeder:

$$R = \frac{K}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) \quad r = \frac{K}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{2}}{10}}.$$

5. Zusatz. Je zwei der citirten Gleichungen geben auch die Relation zwischen R und r, nämlich:

a) Beim Tetraeder: $\frac{2}{3}R\sqrt{6} = 2r\sqrt{6}.$

b) Beim Octaeder: $R\sqrt{2} = r\sqrt{6}.$

c) Beim Ikosaeder: $R\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} = r(3\sqrt{3}-\sqrt{15}).$

d) Beim Hexaeder: $\frac{2}{3}R\sqrt{3} = 2r.$

e) Beim Dodekaeder: $\frac{1}{3}R(\sqrt{15}-\sqrt{3}) = r\sqrt{(50-22\sqrt{5})}.$

§. 82.

IX. Aufgabe. Die Netze der fünf regulären Körper zu zeichnen.

A) Tetraeder. (Fig. 171.)

Construktion. Man construire über AC = 2AB = 2K (K die gegebene Kante des Polyeders) ein gleichseitiges Dreieck ACD, mache AE = CF = AB und ziehe EF, EB und FB, so hat man das verlangte Tetraedernetz.

Beweis?

B) Octaeder. (Fig. 172.)

Construktion. Man verzeichne für AB = K das Netz ADC eines Tetraeders, verlängere AC, mache CG = CB und verzeichne über BG das zweite Tetraedernetz BGH, so erhält man das verlangte Octaedernetz. Beweis?

C) Ikosaeder. (Fig. 173.)

Construktion. Man verzeichne über AB ein gleichseitiges Dreieck ABC, verlängere AB gegen G und mache BD = DE = EF = FG = BA. Durch C ziehe man CM || AG und trage auf diese CH, HJ, JK, KL, LM = AB auf. Endlich ziehe man durch die Theilungspunkte der beiden Parallelen die Linien NT, OV, PX, QZ, SP, QT, RV, ferner die Verlängerungen CS, BO und AN || BO. Deßgleichen MGR, GLX und zu letzterer parallel MZ, so hat man das verlangte Ikosaedernetz. Beweis?

D) Hexaeder. (Fig. 174.)

Das Netz eines Hexaeders sind 6 Quadrate, von denen vier zwischen denselben Parallelen neben einander liegen, von den beiden andern eines oben, das andere unten.

E) Dodekaeder. (Fig. 175.)

Construktion. Man verzeichne über der gegebenen Seite AB ein reguläres 5 Eck ABCDE, verlängere alle Seiten desselben vorwärts und rückwärts, und verbinde die Durchschnittspunkte der verlängerten Seiten durch die geraden Linien FG, GH, HJ, JK und KF; so hat man ein regelmäßiges Fünfeck FGHJK. Man ziehe ferner durch alle Winkelpunkte des Fünfecks ABCDE Diagonalen und verlängere sie bis an die Seiten des Fünfecks FGHJK, so erhält man über den Seiten von ABCDE fünf andere mit diesem congruente Fünfecke. Nun verlängere man eine Seite HJ gegen h hin, bis JH = ih ist, und verzeichne über ih ein reguläres Fünfeck fghik. Zieht man in diesem durch alle Winkelpunkte Diagonalen, so entsteht ein regelmäßiges mit ABCDE congruentes 5 Eck abcde, und wenn man auch noch in letzterem durch alle Winkelpunkte Diagonalen zieht, und diese bis an die Seiten des 5 Ecks fghik verlängert, so erhält man über jeder Seite von abcde ein mit ABCDE congruentes 5 Eck. Man hat also das verlangte Dodekaedernetz. Beweis?

1. Zusatz. Körper, welche von lauter regelmäßigen Vielecken mit gleich großen aber nicht mit gleich vielen Seiten begrenzt werden, so daß nur die gleichnamigen Vielecke congruent sind, nennt man halbreguläre Körper oder Polyeder. Man erhält solche

halbreguläre oder sogenannte **Archimedische Körper**, wenn man von allen Ecken der fünf regulären Körper gleichseitige Pyramiden abschneidet, deren Seitenflächen lauter congruente gleichschenklige Dreiecke sind, indem man entweder a) in alle regelmäßigen Figuren, von welchen jene regelmäßigen Polyeder begränzt sind, regelmäßige Vielecke von gleich viel Seiten einschreibt, oder b) von diesen regelmäßigen Seitenflächen alle Ecken so abschneidet, daß regelmäßige Vielecke von noch einmal so viel Seiten entstehen, und sodann jedes körperliche Eck durch die ihm zunächst liegenden Seiten der eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke abschneidet. Auf solche Weise erhält man:

1) aus dem Tetraeder nach a) sowohl für seine vier Seitenflächen als auch für seine dreiseitigen Ecken gleichseitige Dreiecke, mithin der entstehende Körper ein regelmäßiges Oktaeder. Schneidet man hingegen nach b) die Ecken des Tetraeders ab, so erhält man für jede seiner vier Seitenflächen ein regelmäßiges Sechseck und für jede seiner vier Ecken ein gleichseitiges Dreieck, also einen von vier congruenten Sechsecken und vier congruenten Dreiecken begränzten halbregelmäßigen Körper, dessen Netz (Fig. 176.) zeigt.

2) Im Oktaeder erhält man nach a) für jede seiner sechs vierseitigen Ecken ein Quadrat, also einen von acht Dreiecken und sechs Quadraten eingeschlossenen halbregulären Körper. Werden aber die Ecken nach b) abgeschnitten, so giebt jede der acht Seitenflächen ein regelmäßiges Sechseck und jede der sechs vierseitigen Ecken ein Quadrat. Man erhält daher einen von acht Sechsecken und sechs Quadraten begränzten halbregulären Körper; die Netze beider zeigen Fig. 177. und 178.

3) Aus dem Ikosaeder erhält man nach a) einen von 20 Dreiecken und 12 Fünfecken eingeschlossenen halbregulären Körper. Denselben erhält man auch nach a) aus einem Dodekaeder. Werden die Ecken des Ikosaeders nach b) abgeschnitten, so erhält man einen von 20 Sechsecken und 12 Fünfecken begränzten halbregulären Körper. Die Netze beider zeigen Fig. 179. und 180.

4) Aus dem Hexaeder erhält man nach a) denselben Körper, den man aus dem Octaeder nach a) erhält, nämlich einen von acht Dreiecken und sechs Quadraten eingeschlossenen halbregelmäßigen Körper. Nach b) aber einen von sechs Achtecken und acht Dreiecken begränzten, wie das folgende Netz Fig. 181. zeigt.

5) Aus dem Dodekaeder erhält man nach a) denselben Körper, wie aus dem Ikosaeder nach a). Nach b) einen von 12 Zehnecken

und 20 Dreiecken begränzten halbregulären Körper. Das Netz zeigt Fig. 182.

2. Zusatz. Die Inhaltsbestimmung der sieben halbregulären Körper läßt sich aus der der regulären ableiten, indem man nur die Summe der abgeschnittenen Pyramiden von dem Inhalt der regulären Polyeder abziehen darf. Die Grundflächen der abgeschnittenen Pyramiden sind die erhaltenen Schnittflächen, die Höhen lassen sich als Katheten rechtwinkliger Dreiecke nach dem pythagoräischen Lehrsatze bestimmen. Eben so erhält man auch die Halbmesser der umbeschriebenen Kugeln als Hypotenusen aus den gegebenen Katheten. Zu bemerken ist hier, daß sich wohl um, aber nicht in ein halbregelmäßiges Polyeder eine Kugel so einschreiben läßt, so daß letztere mit ihrer Oberfläche sämmtliche Seitenflächen des Polyeders berührt, was leicht einzusehen ist.

3. Zusatz. Außer den vorerwähnten sieben halbregulären Körpern giebt es mit Ausnahme derjenigen, die zu den Pyramiden und Prismen gehören, noch drei, von zweierlei regulären Figuren begrenzte Archimedische Körper. Der eine ist der vorzugsweise sogenannte Archimedische Körper, dessen Netz, wie Fig. 183. zeigt, aus 18 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken besteht. Sein Inhalt läßt sich als Summe von zweierlei Pyramiden berechnen, deren Grundflächen als die Seitenflächen des Polyeders gegeben sind und deren Höhen sich leicht bestimmen lassen.

Ferner hat man einen von 32 Dreiecken und 6 Quadraten und noch einen von 80 Dreiecken und 12 Fünfecken begränzten halbregulären Körper.

II. Kapitel.

Berechnung des Inhalts der runden Körper.

§. 83.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders mit r, seine Höhe mit h, seinen Inhalt mit C, so ist:

$$C = r^2\pi \times h, \text{ folglich } h = \frac{C}{r^2\pi} \text{ und } r = \sqrt{\frac{C}{h\pi}}.$$

Uebungsaufgaben.

1. Der Halbmesser der Grundfläche eines (senkrechten) 8′ 6″ hohen Cylinders beträgt 1′ 4″ 2‴, wie groß ist der Kubikinhalt?

2. Der Umfang eines Cylinders, der einen Inhalt von 100•' hat, mißt 9' 4'', wie groß ist die Höhe des Cylinders?

3. Der Cubikinhalt eines Cylinders, dessen Höhe sich zum Umfang der Grundfläche verhält, wie 9 : 5, ist 40c' 715c'' 56c'''. Wie groß ist die Höhe und der Halbmesser der Grundfläche?

4. Wie groß ist die Gesammtoberfläche eines (senkrechten) Cylinders, dessen Grundfläche einen Halbmesser von 1' 6'' hat, und dessen Höhe 8' 6''' beträgt?

5. Der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, dessen Gesammtoberfläche 28□' 28□'' 94□''' beträgt, mißt 8'' 4''', wie groß ist die Höhe des Cylinders?

6. Der Mantel eines 6' 4'' hohen Cylinders hat 32□' 97□'' 42□'''. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche?

7. Das Netz eines (senkrechten) Cylinders zu zeichnen, wenn der Halbmesser der Grundfläche und die Höhe oder zwei andere Bestimmungsstücke gegeben sind.

Anmerk. Das Netz eines schiefen und das eines abgekürzten Cylinders zu zeichnen, lehrt die descriptive Geometrie?

§. 84.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche eines Kegels mit r, seine Höhe und Seite mit h und s, seinen Inhalt mit K, so ist:

$$K = \frac{r^2\pi \times h}{3}, \text{ folglich } h = \frac{3K}{r^2\pi} \text{ und } r = \sqrt{\frac{3K}{h\pi}}.$$

Ferner ist $h = \sqrt{(s+r)(s-r)}$, welchen Werth man auch in die obigen Gleichungen setzen kann.

Für den Inhalt eines parallel zur Grundfläche abgekürzten Kegels $\mathfrak{K}$, dessen beide Halbmesser R und r, dessen Höhe und Seite h und s, hat man:

$$\mathfrak{K} = \frac{h\pi}{3}[R^2 + r^2 + Rr]. \text{ Ferner ist } s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}.$$

Uebungsaufgaben.

1. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Kegels, wenn dessen Seite 4' 1'' und der Halbmesser der Grundfläche 9'' mißt?

2. Wie groß ist die Höhe eines senkrechten Kegels, dessen Achsendurchschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, wenn die Seite desselben 3' 5'' hat?

3. Welches ist der Cubikinhalt eines solchen Kegels, wenn dessen Gesammtoberfläche 5□' 76□'' hat?

4. Wie groß ist der Mantel eines 4' 8'' hohen Kegels, dessen körperlicher Inhalt $4^{c'}$ $48^{c''}$ hat?

5. Der Cubikinhalt eines senkrechten Kegels, dessen Mantel noch einmal so groß ist, als die Grundfläche, beträgt $136^{c'}$ $400^{c''}$. Wie groß ist die Höhe des Kegels?

6. Der Halbmesser der Grundfläche eines abgestumpften Kegels ist 4' 6'', dessen Höhe 3' 4'', seine Seite 4' 2'', wie groß ist der Cubikinhalt?

7. Das Netz eines senkrechten Kegels zu zeichnen, wenn von seinen Bestimmungsstücken: Höhe, Seite, Halbmesser der Grundfläche (oder Umfang, oder Inhalt derselben), Winkel des Ausschnittes, der den Mantel bildet, Mantelfläche, Gesammtoberfläche, körperlicher Inhalt — zwei gegeben sind.

8. Das Netz eines abgekürzten Kegels zu zeichnen.

9. Von einem 4' 8'' langen Cylinder aus Eichenholz soll durch einen zu den Grundflächen parallelen Schnitt so viel abgeschnitten werden, daß das Gewicht des Cylinders um 96 ℔ geringer wird. In welcher Entfernung von der einen Grundfläche wird der Schnitt geführt werden müssen, wenn der Durchmesser der Grundflächen 2' 6'' beträgt?

10. Wie schwer wiegt ein 6' langer hohler eiserner Cylinder, dessen innerer Durchmesser 3' 6'' und dessen Eisenstärke 1'' 6''' beträgt?

11. Ein abgekürzter 26' 4'' hoher Kegel soll durch eine zu der Grundfläche parallele Ebene halbirt werden, wie groß muß die Höhe des oberen Stücks werden, wenn der Halbmesser der einen Grundfläche 3' 6'' und der der andern 2' 8'' hat?

§. 85.

Einfache Bestimmung des Inhalts eines Cylinders in landesüblichem Flüssigkeitsmaße z. B. in bayerischen Maßkannen durch hiezu construirte Maßstäbe.

Die gesetzliche Einheit des Flüssigkeitsmaßes in Bayern ist die Maßkanne = $43^{c'}$ Dez. Das Muttermaß ist ein Cylinder von 6,969'' bayer. Dez. Höhe und im Durchmesser = 2,803'', woraus sich der Inhalt zu $43,0036^{c''}$ berechnet.

Um den Inhalt eines Cylinders, dessen Durchmesser D und dessen Höhe H in bayer. Dez. Zollen ausgedrückt ist, in Maßkannen zu erhalten, dürfte man nur den Inhalt J mit 43 dividiren, folglich

$$J = \frac{D^2 \pi H}{4 \times 43}.$$

Um aber die für die Praxis unbequeme Rechnung zu beseitigen, hat man eigene Maßstäbe (Cylindermaßstäbe) construirt, durch deren Anwendung die obige Berechnungsformel in eine einfache Multiplikation zweier Faktoren verwandelt, wie aus Folgendem zu ersehen.

Hat man sich aus den obigen Angaben über den Inhalt der Maßkanne den Durchmesser D und die Höhe h eines Cylinders bestimmt, der genau eine bayr. Maß faßt, so daß also $\frac{d^2 \pi h}{4 \times 43} = 43^{c''}$ Dez. bayr. $= 1$ Maß, so ist, wenn der Inhalt des zu bestimmenden Cylinders (J) mit x bezeichnet wird:

$$\frac{d^2 \pi h}{4 \times 43} : \frac{D^2 \pi H}{4 \times 43} = 1 \text{ Maß} : x \text{ Maß, oder}$$

$$d^2 h : D^2 H = 1 : x, \text{ mithin}$$

$$x = \frac{D^2 H}{d^2 h} = \frac{D^2}{d^2} \times \frac{H}{h} = mn,$$

wo also die Zahl m ausdrückt, wie oft d^2 in D^2 und n, wie oft h in H enthalten ist. Um also n zu bestimmen, darf man einen Maßstab anfertigen, auf welchem die Höhe h mehrere Male aufgetragen ist und mit demselben die Höhe des zu bestimmenden Cylinders messen. Es ist also dieser Maßstab ein einfacher Längenmaßstab.

Um aber m zu bestimmen, muß man die Längen d', d'', d''' .... von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte aus so bestimmen, daß d'^2, d''^2, $d'''^2 \ldots = 2d^2, 3d^2, 4d^2 \ldots$ wird.

Das Mittel hiezu bietet das rechtwinklige Dreieck.

Macht man ein rechtwinkliges Dreieck ABd, (Fig. 184.), in welchem die beiden Katheten AB = Ad, = d, so ist bekanntlich

$$AB^2 = 2d^2 = (ad_2)^2.$$

Errichtet man in d_2 eine Senkrechte $d_2C = d, B = d$, so ist:

$$AC^2 = (Ad_3)^2 = (Ad_2)^2 + (d_2C)^2 = 3d^2.$$

Fährt man auf dieselbe Weise fort d_3, d_4, d_5.... zu construiren, so erhält man den Maßstab, mit dem der Durchmesser des Cylinders zu messen ist, um zu finden, wie oft die Grundfläche $d^2\pi$ in $D^2\pi$ enthalten ist, oder um die Zahl m zu erhalten.

Anmerk. Es ist zwar willkührlich, in welchem Verhältniß d und h zu einander stehen, doch muß man dasselbe so nehmen, daß d nicht zu klein wird, weil sonst das Auftragen der Punkte d, d_2, d_3 ... nicht gar weit fortgesetzt werden könnte. Macht man aber d zu groß, folglich h dagegen bedeutend klein, so giebt eine kleine Ungenauigkeit in Abnahme der Höhe einen bedeutenden Fehler im kubischen Inhalt, was leicht einzusehen ist. Es versteht sich übrigens von selbst, daß man um größere Cylinder zu messen, nicht die Maßkanne, sondern größere Einheiten als Achtels-, Viertels-, halbe oder ganze Eimer zu Grunde legen muß. Man nennt solche Cylindermaßstäbe auch Visirstäbe.

Um auch den Inhalt eines Fasses mit einem solchen Visirstabe bestimmen zu können, hat Lambert in seinen mathematischen Beiträgen Thl. I. Abth. 2. eine Formel entwickelt, nach der man den Inhalt eines Fasses als das Mittel aus drei Cylindern bestimmt, die alle die Faßlänge GH (Fig. 185.) zur Höhe, die beiden ersten gemeinschaftlich die Spundtiefe EF und der dritte das Mittel aus den beiden Bodentiefen AB und CD zu Durchmessern haben. Es wäre sonach, wenn man die mit dem Längenmaßstab gemessene Linie GH mit l, die mit dem Quadratmaßstab gemessenen Linien AB und CD mit b und b′ und die mit demselben Maßstab gemessene Linie EF mit s bezeichnete, der Inhalt des Fasses:

$$F = \frac{2sl + \left(\frac{b+b'}{2}\right) l}{3} = \frac{2}{3} sl + \frac{(b+b')l}{6}.$$

Wären die beiden Bodenlängen b und b′ einander gleich, so hätte man:

$$F = \frac{1}{3}(2s + b).$$

Beispiel. Ist $l = 9^3/_4$, $s = 29^1/_4$, $b = 21^1/_2$, $b' = 21^1/_4$, so ist:

$$F = \frac{2}{3} \times 9\frac{3}{4} \times 29\frac{1}{4} + \frac{(21\frac{1}{2} + 21\frac{1}{4}) \times 9\frac{3}{4}}{6} = 259\frac{19}{32},$$

welcher Werth nach Lambert's Behauptung kaum um $^1/_{150}$ gefehlt ist.

Anmerk. 1. Nach der gemeinen Methode, wo man nur $\frac{1}{2}(s+b)$ nimmt, erhält man $247^{11}/_{32}$ ($b = 21^1/_2$ gesetzt), während man unter der Bedingung das $b = b'$ wäre, nach der Lambertischen Formel 260 findet. Hieraus sieht man, welche Unsicherheit die gewöhnliche Formel giebt.

Anmerk. 2. Setzte man voraus, daß der zu messende Cylinder dem der Maßeinheit ähnlich sey, so daß also $h : H = d : D$ wäre, so

könnte man in ähnlicher Weise d_1 so bestimmen, daß $d_1^3 = 2d^3$ wäre u. s. w., wodurch man einen kubischen Maßstab erhielte und nur eine Dimension zu messen brauchte. Man wendet häufig dergleichen bei Fässern an, aber ohne hinlängliche Genauigkeit, da sich die Fässer nicht durchaus ähnlich sind. Wir unterlassen es daher, die Construktion und den Gebrauch solcher Maßstäbe umständlicher zu erwähnen.

Uebungsaufgaben.

1. Wie hoch ist ein cylinderförmiges Gefäß, das eine bayerische Maß enthält, wenn die Höhe dem Durchmesser gleich seyn soll?

2. Eine Feuerspritze hat zwei Cylinder oder Stiefel, deren innerer Durchmesser 8'' mißt. Wenn nun die Hubhöhe des Kolbens in jedem 1' beträgt und derselbe in jeder Minute 32 mal auf- und abgeht, wie viel Eimer Wasser wird die Spritze während einer Stunde unausgesetzter Thätigkeit ergießen?

3. Wie viel Eimer faßt ein kupferner Kessel, der die Form eines abgestumpften Kegels hat, dessen unterer Durchmesser 4' 8'', oberer 6' und Seitenlänge 3' 6'' mißt?

§. 86.

Bezeichnet man den Halbmesser einer Kugel mit R, ihre Oberfläche mit O, ihren körperlichen Inhalt mit K, so ist:

1) $O = 4R^2\pi$, folglich $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$.

2) $K = \frac{4R^3\pi}{3}$, „ $R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}$.

Aus diesen beiden Werthen von R folgt

3) $K = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{O^3}{\pi}}$, folglich $O = \sqrt[3]{36K^2\pi}$.

Uebungsaufgaben.

1) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser 5' 3'' 2''' Duodez. hat?

2) Der Umfang des Aequators der Erde beträgt 5400 geographische Meilen, wie groß ist die Oberfläche? (Ohne Berücksichtigung der Abplattung.)

3) Wie groß muß der Halbmesser einer Kugel seyn, wenn die Oberfläche 1□' betragen soll?

4. Wie groß ist der Kubikinhalt der Erde?

5. Der Kubikinhalt einer Kugel ist 8^{c'}, wie groß ist ihr Durchmesser?

6. Die Oberfläche einer Kugel hat 2□', wie groß ist ihr Kubikinhalt?

7. Der Halbmesser einer Kugel ist r, wie groß muß der Halbmesser **R** einer andern Kugel seyn, welche sich zur ersten verhält wie m : n?

8. Wie groß ist der Inhalt einer hohlen Kugel, deren äußerer Durchmesser **D** und deren Dicke m ist?

9. Eine hohle messingene Kugel, deren äußerer Durchmesser 2' 4'' mißt, wiegt 240 ℔. Wie dick ist das Messing?

10. Die Oberfläche einer Kugel ist der Oberfläche eines Würfels gleich, welcher Körper ist größer?

11. Mit welchem Gewichte drückt eine 80 ℔ schwere eiserne Kugel auf den Boden eines mit Wasser angefüllten Gefäßes?

12. Man soll eine hohle eiserne Kugel 1 ℔ schwer machen, welche im Wasser schwebt. Wie groß müssen die beiden Durchmesser werden?

§. 87.

Bezeichnet man die Fläche eines Kugelzweiecks mit Z, den körperlichen Inhalt eines Kugelkeils mit K und in beiden Fällen den zugehörigen Flächenwinkel in Graden mit n, so ist:

$$1)\ Z = \frac{nR^2\pi}{90}, \text{ folglich } R = \sqrt{\frac{90Z}{n\pi}} \text{ und } n = \frac{90Z}{R^2\pi}.$$

$$2)\ K = \frac{nR^3\pi}{270} \quad " \quad R = \sqrt[3]{\frac{270K}{n\pi}} \quad " \quad n = \frac{270K}{R^3\pi}.$$

Uebungsaufgaben.

1. Wie groß ist der Flächenraum eines Kugelzweiecks, wenn sein Winkel 25° 36' hat und der Halbmesser der Kugel 1' mißt?

2. Ein Kugelzweieck hat eine Größe von 1□', wie gros ist der Halbmesser der Kugel, wenn der Winkel 5° hat?

3. Wie viele Grade hat der Winkel eines Kugelkeils, dessen Inhalt gleich ist 1^{c'}, menn der Halbmesser der Kugel 3' 5'' hat?

§. 88.

Bezeichnet man den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks mit △, seine drei Winkel in Graden ausgedrückt mit A, B, C, so folgt aus §. 65.:

$$\triangle = \frac{A+B+C-180}{180} \times R\pi \ldots\ldots (a).$$

Man nennt den Ueberschuß $A+B+C-180$ der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks über 180 Grade den sphärischen Exceß des Dreiecks; bezeichnet man denselben mit E, so hat man statt der Gleichung (a):

$$\triangle = \frac{E}{180} \times R^2\pi \ldots\ldots (b).$$

Für ein anderes Dreieck $\triangle'$ auf derselben Kugel, dessen Exceß gleich ist E′ hat man eben so:

$$\triangle' = \frac{E'}{180} \times R^2\pi, \text{ folglich auch } \triangle : \triangle' = E : E' \ldots (c),$$

d. h. der Exceß wird um so größer, je größer das Dreieck selbst ist, woraus wieder folgt, daß man ein sphärisches Dreieck um so mehr als ein geradliniges ansehen kann, je kleiner es ist. Wird jeder Winkel gleich 180°, in welchem Falle das Dreieck in die halbe Kugelfläche übergeht und gleich ist $2R^2\pi$, so ist der Exceß gleich 360°, wie auch aus (b) folgt, wenn man dort statt $\triangle$ die halbe Kugelfläche, nämlich $2R^2\pi$ setzt.

1. Beispiel. Bei einem sphärischen Dreiecke, dessen zugehöriger Kugelhalbmesser 3′ beträgt, haben die Winkel folgende Größe: $A = 49^0\,48'$, $B = 105^0\,4'$, $C = 83^0\,8'$, wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

Auflösung. $\triangle = \frac{E}{180} \times R^2\pi = \frac{58}{180} \times 9\pi = 9{,}1106\Box'$ $= 9\Box'\ 11\Box''\ 6\Box'''$.

2. Beispiel. Wie groß ist der sphärische Exceß eines Dreiecks unserer Erde, dessen Inhalt 10 Quadratmeilen beträgt, wenn man die ganze Erdoberfläche zu 9½ Million Quadratmeilen annimmt?

Auflösung. Da für die halbe Kugelfläche der Exceß 360° beträgt, so giebt die Proportion (c):

$$10 : 4750000 = E : 360, \text{ folglich } E = \frac{360 \times 10 \times 60 \times 60}{4750000}$$

Sekunden = 2,72 Sekunden.

§. 89.

Für die Fläche einer Kugelmütze M, deren Höhe h ist und die zu einer Kugel vom Halbmesser R gehört, hat man:

$$M = 2R\pi \times h, \text{ folglich } h = \frac{M}{2R\pi} \text{ und } R = \frac{M}{2h\pi}.$$

Da aber (nach Pl. §. 54. und §. 65. Zus. 2.), wenn man den Halbmesser der die Mütze begrenzenden Kreisfläche mit r bezeichnet:

$h : r = r : 2R - h$, folglich $2R = \frac{r^2}{h} + h$ ist, so erhält man durch Substitution in die obige Gleichung:

$$M = \pi h \times (\frac{r^2}{h} + h) = (r^2 + h^2) \times \pi.$$

Da nun eine Mütze durch Umdrehung eines halben Kreisabschnittes um seine Höhe erzeugt wird, wobei die halbe Sehne des Abschnittes den Halbmesser der Grundfläche (r) vorstellt, so hat man, wenn s die Sehne des erzeugenden halben Kreisabschnittes ist, $s^2 = h^2 + r^2$, folglich auch $M = s^2\pi$, d. h. eine Kugelmütze ist einer Kreisfläche gleich, welche die Sehne des erzeugenden Bogens zum Halbmesser hat.

Uebungsaufgaben.

1. Die Höhe einer Kugelmütze ist 3″ 4‴, der Durchmesser der dazu gehörigen Kugel 8′ 5″, wie groß ist die Fläche der Mütze?

2. Die Höhe einer Mütze ist 3″ 1‴, der Durchmesser der Grundfläche 1′ 8″, wie groß der Flächeninhalt?

§. 90.

Für den Inhalt eines Kugelabschnittes S, dessen Höhe h ist und der Halbmesser der Kugel R, giebt §. 69. Zus. 3.:

$$S = h^2\pi \times (R - \frac{h}{3}), \text{ folglich } R = \frac{S}{h^2\pi} + \frac{h}{3}.$$

Dagegen ist, wenn r den Halbmesser der Grundfläche des Abschnittes bezeichnet, nach §. 69. Zus. 4.:

$$S = \frac{h}{2} \times r^2\pi + \frac{h^3\pi}{6} = \frac{h\pi}{2} \times (r^2 + \frac{h^2}{3}), \text{ folglich}$$

$$r = \sqrt{(\frac{2S}{h\pi} - \frac{h^2}{3})}.$$

Anmerk. Die Bestimmung von h führt in beiden Fällen auf eine Gleichung vom dritten Grade.

Uebungsaufgaben.

1. Wie groß ist der Inhalt eines Kugelabschnittes von der Höhe h = 3″ 4‴, wenn der Halbmesser der Kugel 2′ 5″ hat?

2. Der Inhalt eines Kugelabschnittes von der Höhe h = 1′ 2″ soll 10°′ enthalten, wie groß muß der Durchmesser der Kugel seyn, von welcher der Abschnitt zu nehmen ist?

3. Wie groß ist der Inhalt eines 3'' hohen Abschnittes, wenn der Durchmesser seiner Grundfläche 2' 3'' hat?

4. Der Inhalt eines Kugelabschnittes von der Höhe $h = 5'' \; 6'''$ ist $1^{c'}$, wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche?

§. 91.

Für die Fläche der Kugelzone Z, deren Höhe h ist und die zu einer Kugel vom Halbmesser R gehört, hat man, wie bei der Mütze

$$Z = 2R\pi \times h.$$

Sind hier statt R die beiden Halbmesser der zugehörigen Kreisflächen r und r' gegeben, so erhält man, wenn r der kleinere Halbmesser ist und die Höhe der ergänzenden Mütze mit x bezeichnet wird, nach dem phytagoräischen Lehrsatze:

$$R = \frac{r^2 + x^2}{2x} = \frac{r'^2 + (h + x)^2}{2(h + x)},$$

aus welcher Gleichung sich x berechnen, folglich R und also auch die Größe der Zone Z sich finden läßt.

Beispiel. Es sey $r = 3'$, $r' = 4'$ und $h = 5'$, so ist:

$$R = \frac{9 + x^2}{2x} = \frac{16 + (5 + x)^2}{2(5 + x)}, \text{ woraus folgt:}$$

$$x^2 + \frac{32}{5} x = 9, \text{ mithin } x = -\frac{16}{5} + \sqrt{(9 + \frac{256}{25})} = 1{,}186.$$

Hieraus ergiebt sich $R = \dfrac{9 + (1{,}186)^2}{2{,}372} = 4{,}387$, und

$$Z = 2R\pi \times h = 2\pi \times 4{,}387 \times 5 = 137{,}82\square'.$$

§. 92.

Für den Inhalt eines Kugelrumpfes R, dessen Höhe h ist und dessen beide Grundflächen die Halbmesser r und r' haben, giebt der Lehrsatz XVI. §. 70.:

$$R = \frac{h\pi}{6} \times [3r^2 + 3r'^2 + h^2].$$

Beispiel. Es sey $h = 6$, $r = 7$, $r' = 10$, so ist

$$R = \pi \times (147 + 300 + 36) = 483\,\pi = 1517{,}4^{c'}.$$

Anhang. (Uebungsaufgaben.)

1. Der Ueberschuß d der Seite eines gleichseitigen Dreiecks über seine Höhe ist gegeben, man soll die Seite s und den Inhalt △ des Dreiecks finden.

2. Der Ueberschuß d der Diagonale eines Quadrates über seine Seite ist gegeben, man soll die Seite s und den Inhalt Q des Quadrates finden.

3. Der Ueberschuß d einer Kreislinie über ihren Durchmesser ist gegeben, man soll daraus den Durchmesser d, den Umfang p und Inhalt K des Kreises finden.

4. Die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks sind gegeben, man soll die Halbmesser R und r des um- und eingeschriebenen Kreises finden.

5. Der Inhalt △ und der Umfang U eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben, man soll die Seiten finden.

6. Der Umfang p eines Quadranten ist gegeben, man soll den Flächeninhalt Q desselben finden.

7. Der Halbmesser r eines Kreises ist gegeben, wie groß ist die Seite s eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Inhalt dem des Kreises gleich ist?

8. Der Cubikinhalt C eines Cylinders und das Verhältniß m : n des Umfangs zur Höhe sind gegeben, man soll die Höhe h und den Durchmesser d der Grundfläche finden.

9. Der Cubikinhalt K eines Kegels, dessen Achsendurchschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, ist gegeben, man soll die Seite s des Kegels finden.

10. Ein kegelförmiger Kugelausschnitt ist durch die Grundfläche des zugehörigen Kugelabschnittes halbirt, wie verhält sich die Höhe h des letzteren zum Halbmesser R der Kugel?

11. Der Mantel eines Kegels bildet einen Quadranten, dessen Fläche M gegeben ist, wie groß ist der körperliche Inhalt K des Kegels?

12. Ein Dreieck, dessen drei Seiten a, b, c gegeben sind, dreht sich um die Seite a, wie groß ist der Inhalt K des entstehenden Doppelkegels?

13. Von einem Würfel, dessen Kante a ist, werden die Ecke so abgeschnitten, daß der entstehende Körper von sechs regelmäßigen Achtecken und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Wie groß ist die Oberfläche O und der Inhalt K dieses Körpers?

14. Bei einem gleichseitigen Kegel verhält sich die Grundfläche zum Mantel, wie 2 : 3, wie viele Grade hat der Winkel des Kreisausschnittes, welcher den Mantel bildet?

15. Nach der sogenannten Guldin'schen Regel ist der Inhalt eines Körpers, der durch Umdrehung einer ebenen Figur um eine in derselben Ebene aber außerhalb der Figur liegenden Achse erzeugt wird, gleich dem Produkte aus der Figur und der Länge des Wegs, welchen der Schwerpunkt der Figur durchläuft; wie groß ist der Inhalt eines Rings, dessen Querschnitt ein Kreis ist, wenn der Durchmesser des Rings im Lichten D und die Dicke des Rings d ist?

16. Wie weit ist nach derselben Regel der Schwerpunkt eines Halbkreises und eines Quadranten vom Mittelpunkte entfernt, wenn der Halbmesser r gegeben ist?

17. Die Simpson'sche Regel. In der Anwendung der Geometrie auf Fälle des praktischen Lebens sind zuweilen ebene Figuren zu berechnen, die entweder ganz oder theilweise von unregelmäßig krummen Linien eingeschlossen sind. Man findet hier den Inhalt näherungsweise auf folgende Art:

Es sey ABECD (Fig. 186.) in A und D rechtwinklig von geraden und von der krummen Linie BEC begrenzt. Zieht man im Halbirungspunkte F der Grundlinie AD die Senkrechte FE, so ist offenbar der Inhalt der Figur

$$J > \frac{AB + EF}{2} \times AF + \frac{EF + CD}{2} \times FD,$$

oder wenn man AB, EF, CD durch h_0 h_1 h_2 und AD durch g bezeichnet

$$J > \frac{h_0 + h_1}{2} \times \frac{g}{2} + \frac{h_1 + h_2}{2} \times \frac{g}{2}.$$

Sind nun die einzelnen Höhen nicht zu weit von einander entfernt, so sind ziemlich nah die mittleren Höhen

$$\frac{h_0 + 2h_1}{3} \text{ und } \frac{2h_1 + h_2}{3}, \text{ folglich}$$

$$J = \frac{h_0 + 2h_1}{3} \times \frac{g}{2} + \frac{2h_1 + h_2}{3} \times \frac{g}{2}$$

$$= g \times \frac{h_1 + 4h_1 + h_2}{6} \ldots\ldots \text{(I.)}$$

Würde man zwischen A und D in gleichen Abständen zwei Senkrechte h_1 und h_2 ziehen, so hätte man näherungsweise:

$$J = g \times \frac{h_0 + 3(h_1 + h_2) + h_3}{8} \ldots\ldots \text{(II.)}$$

Bezeichnet man nun in Fig. 187. die einzelnen Theile mit I, II, III u. s. w., so ist, wenn die Zahl der Theile n gerade ist:

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}=\frac{2g}{n}\times\frac{h_0+4h_1+h_2}{6},\ \mathrm{III}+\mathrm{IV}=\frac{2g}{n}\times\frac{h_2+4h_3+h_4}{6},$$

$$\mathrm{V}+\mathrm{VI}=\frac{2g}{n}\times\frac{h_4+4h_5+h_6}{6}\ldots$$ eben so die beiden letzten Theile

$$=\frac{2g}{n}\times\frac{h_{n-2}+4h_{n-1}+h_n}{6},$$ folglich

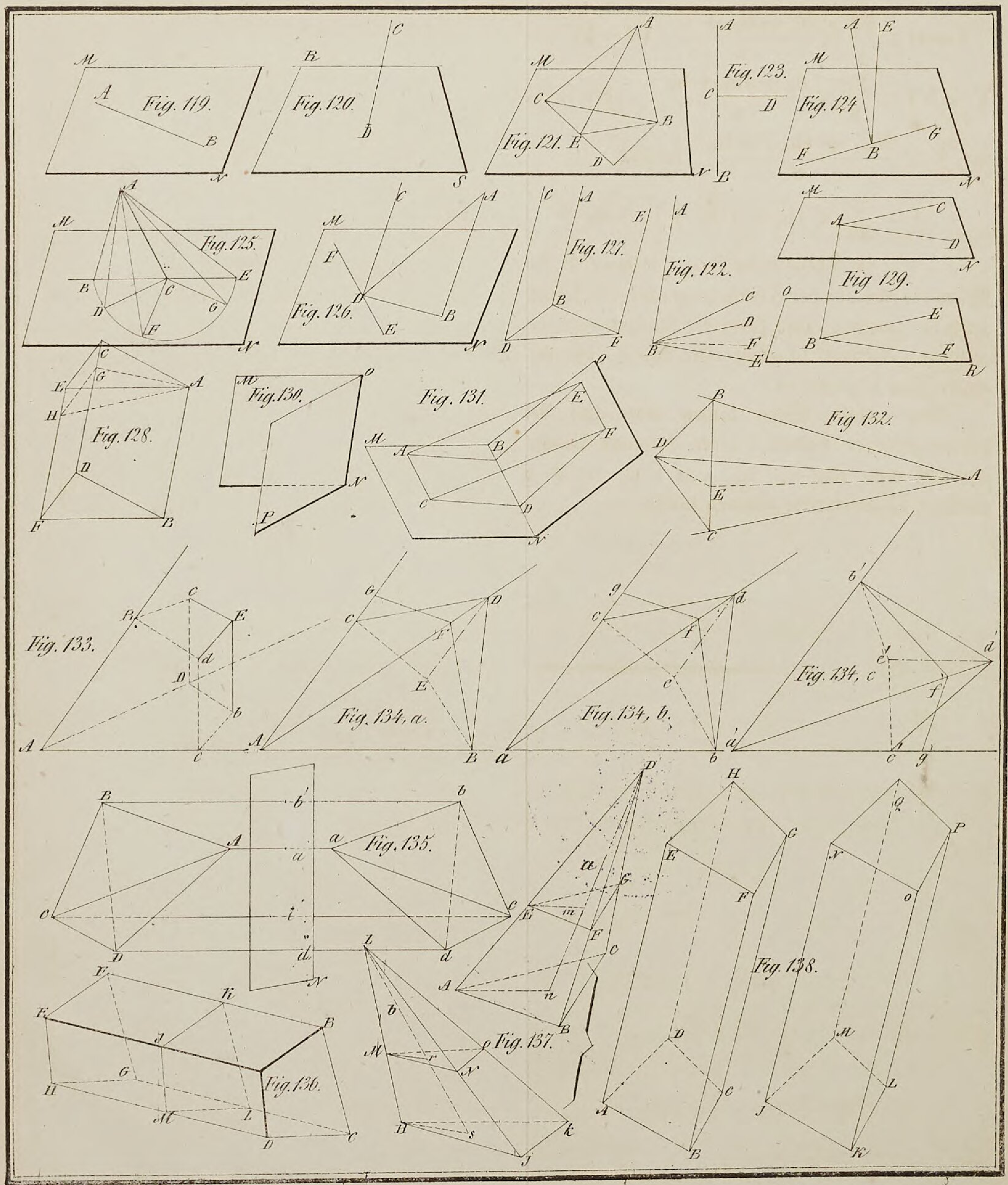
$$J=\frac{g}{3n}\times[h_0+4(h_1+h_3+h_5+\ldots+h_{n-1})$$
$$+2(h_2+h_4+\ldots\ldots+h_{n-1})+h_n]\ \ldots\ldots(\mathrm{III.})$$

Wäre die Anzahl der Theile ungerade, so könnte man die drei ersten nach der zweiten, und dann die übrigen nach der letzten Gleichung berechnen. Beispiel ist etwa eine Wiese, die auf der einen Seite durch einen Fluß begrenzt ist.

Auf dieselbe Weise könnte man auch den Inhalt solcher Umdrehungskörper finden, deren krumme Fläche unregelmäßig wäre, nur daß man statt h_0, h_1 ... u. s. w. die in gleichen Abständen gemachten Querschnitte nehmen müßte. —

Stadtbibliothek Augsburg

Nº 2



Endres Geometrie.

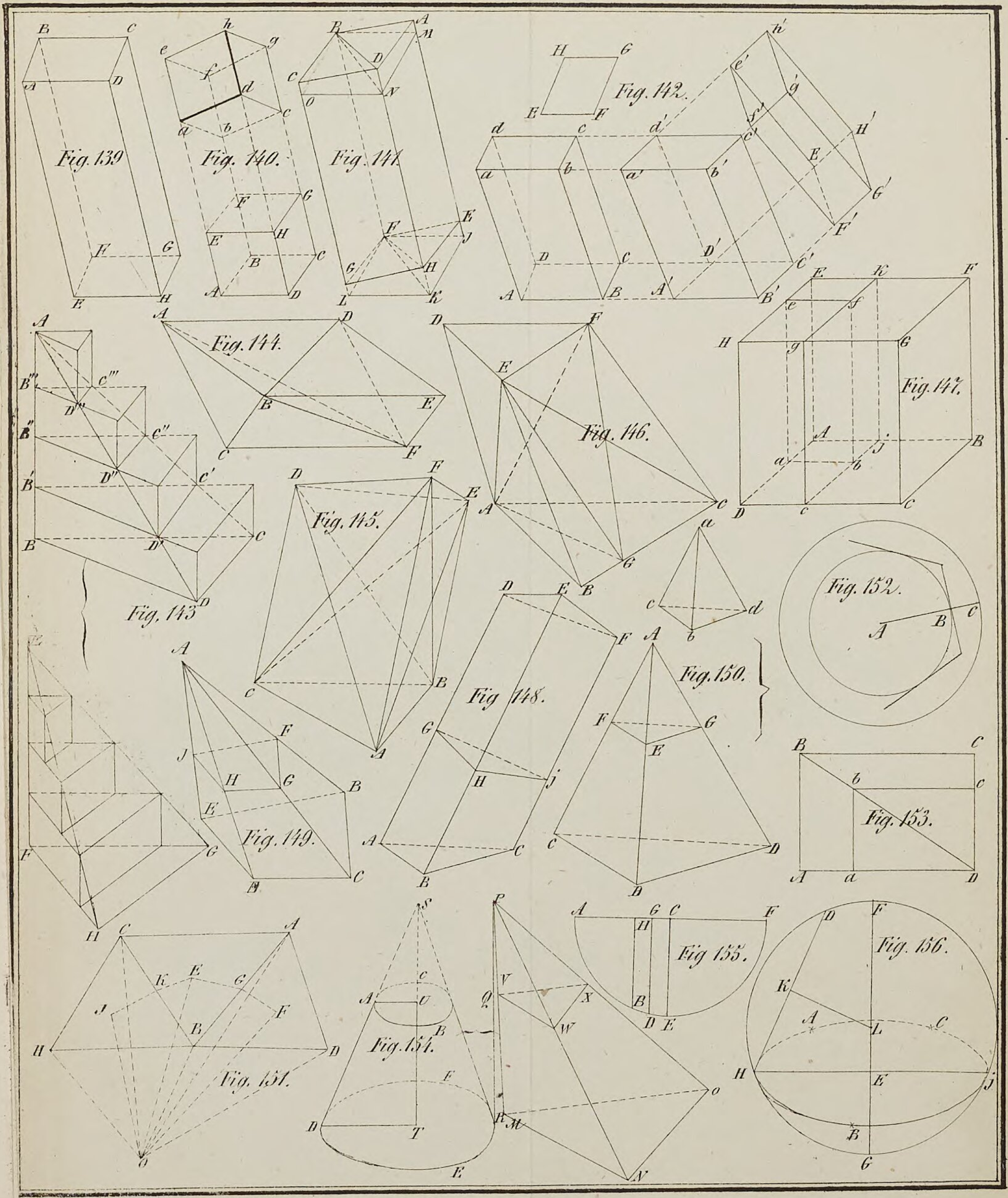


Fig. 139
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.

Tab. 10.

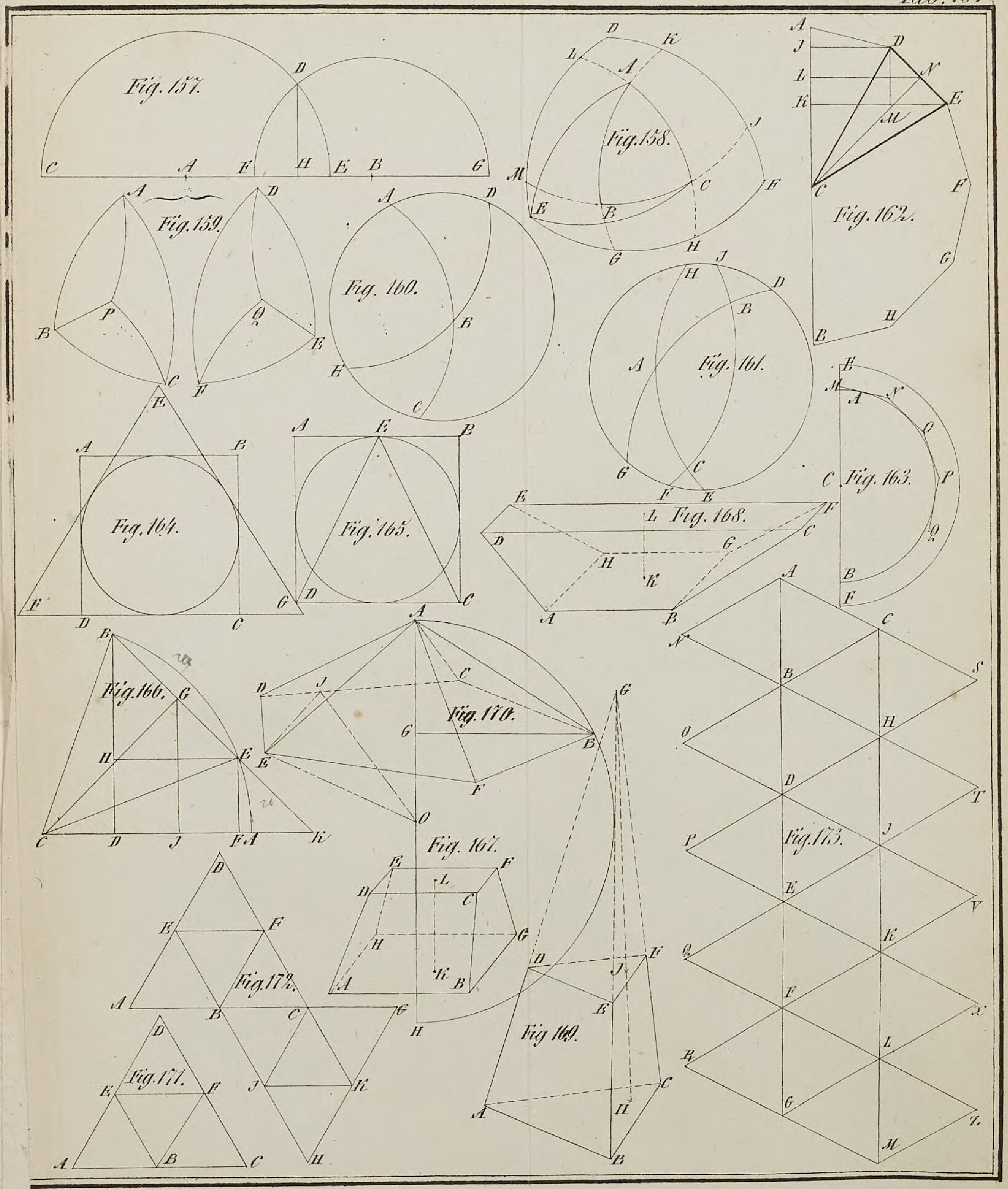


Fig. 157.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.
Fig 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172.
Fig. 173.

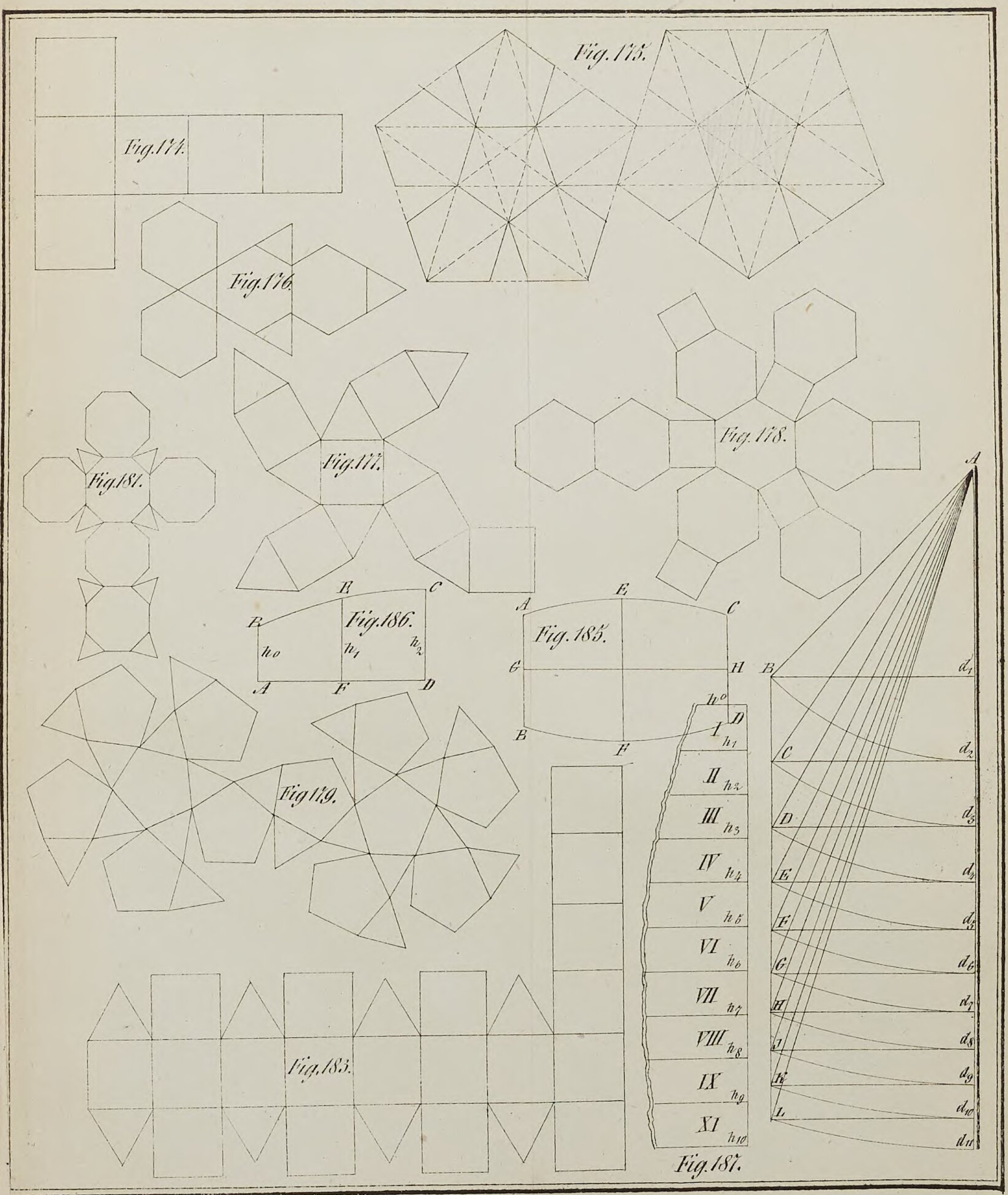


Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 181.
Fig. 186.
Fig. 185.
Fig. 179.
Fig. 183.
Fig. 187.

Fig. 180.

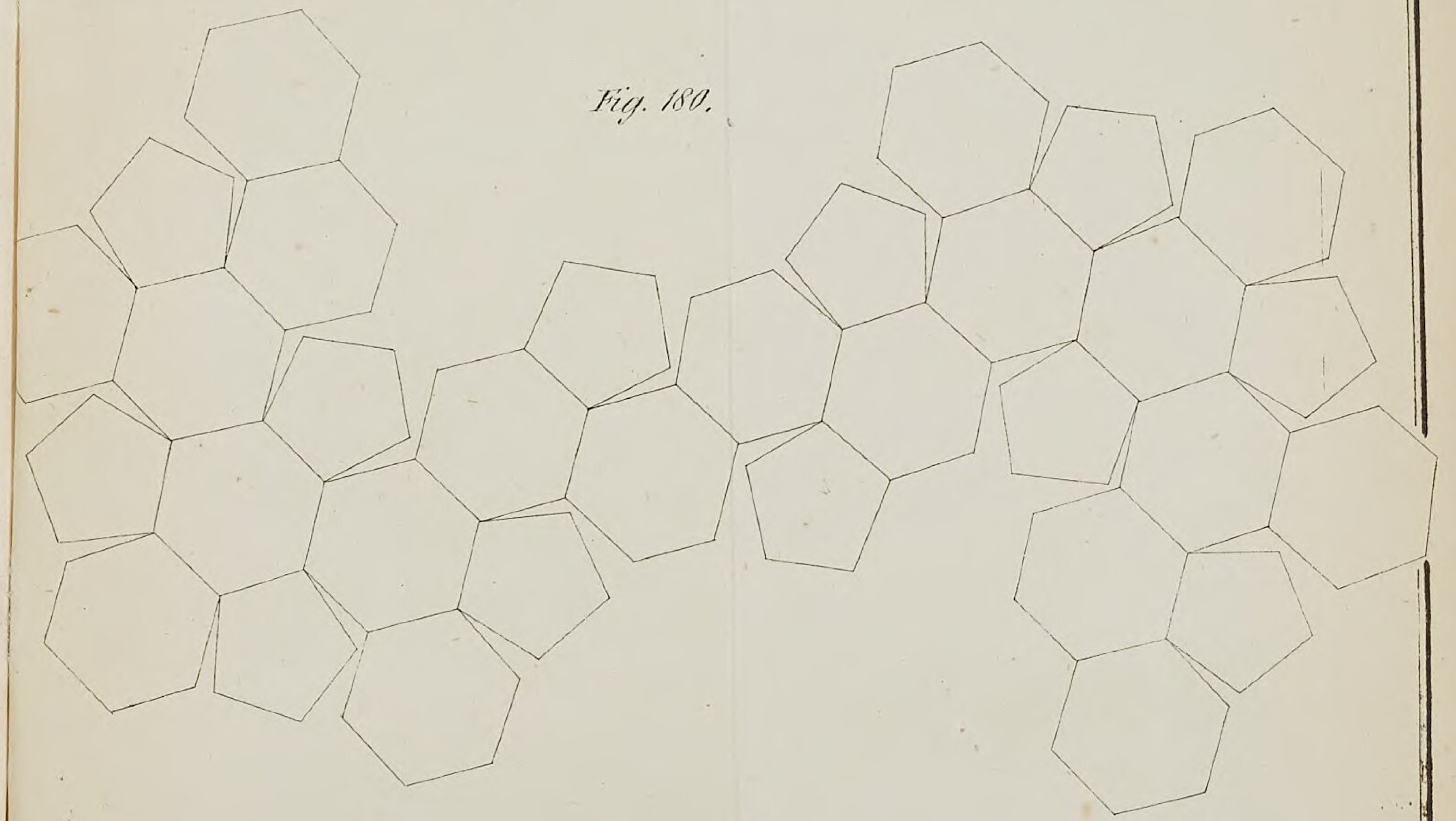
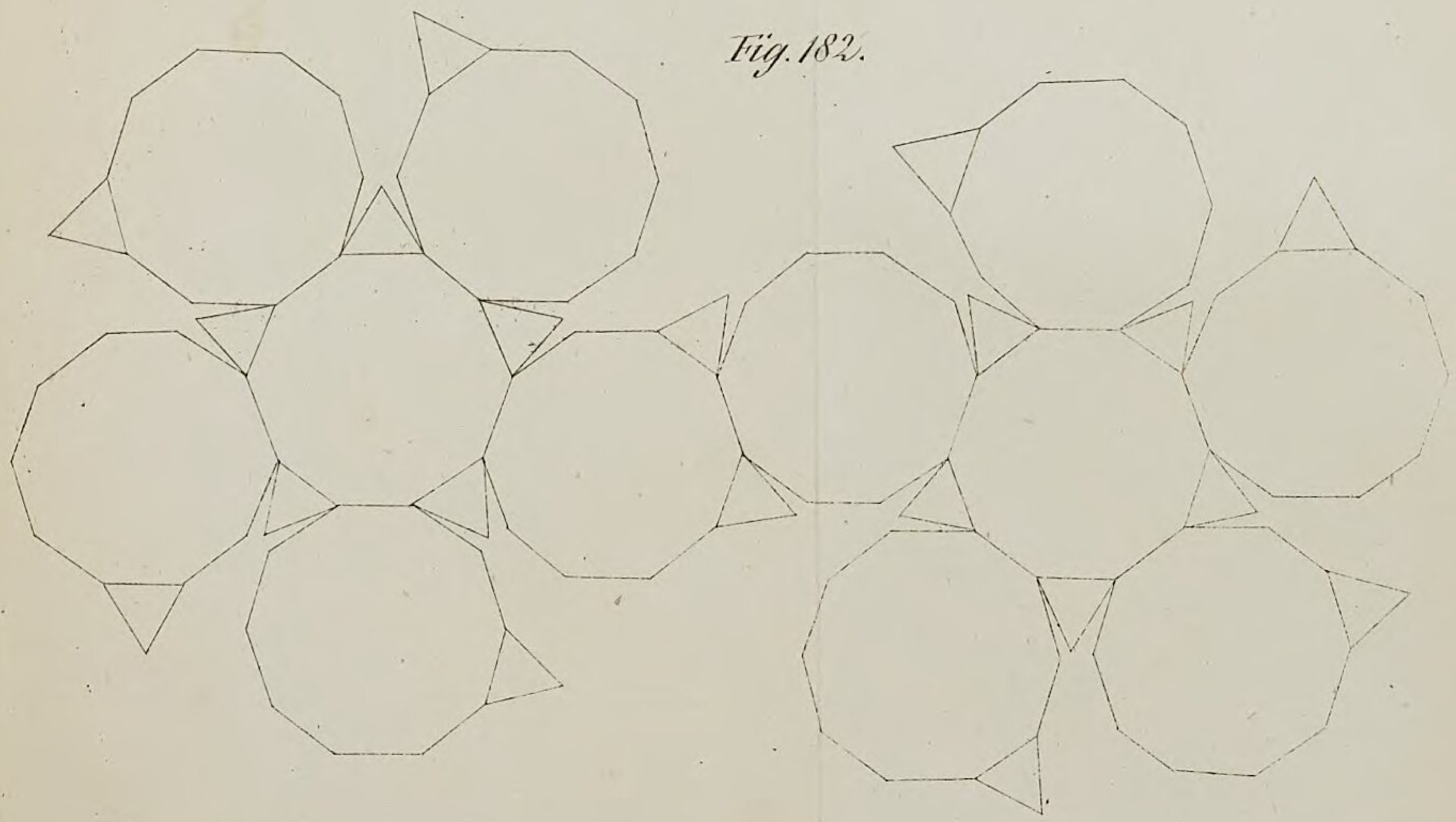


Fig. 182.



[illegible]

8° Math.
Endres

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Endres, G. M.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie zum Gebrauche beim Unterrichte, besonders an technischen Lehranstalten

Bd.: 2.

Augsburg 1849

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 179 -2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11192277-6